

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_191034**

UNIVERSAL  
LIBRARY

كتاب

# الروضتة الزهرية

في

# الاصول الجبرية

تأليف كريستوس فان ديك

برخصة مجلس معارف ولاية سورية الجلولة.

طُبِعَ ثَالِثَ فِي الْمَطْبَعَةِ الْأَمْرَكَانِيَّةِ فِي يَبْرُوتِ مَنَةِ ١٨٩١

## بسم الله المبدى المعيد

الحمد لله الملك الوهاب الذي يده الجبر والكسر واليو المرجع والمآب . اما بعد  
فيقول العبد الفقير الى عنونه تعالى كرنيليوس فان ذلك الاميركاني هذا كتاب في علم  
الجبر الحسابي قد علفت فيه ما املته على بعض التلامذة في مدرسة عيه احدى قرى  
جبل لبنان سنة ١٨٤٨ للتاريخ المسيحي سالكا فيه مسلك بعض العلماء الاميركانيين .  
ثم اضفت اليه زيادات اخرى من كتب بعض العلماء الفرنسيين والانكليزيين . وقد  
اضمت الى هذه الطبعة الثالثة فصولاً وبعض المائل والابصاحات والعلقات لم توضع  
في الطبعة الاولى وبالله التوفيق

## مقدمة

### في العلوم التعليمية بالاجال

١ موضوع العلوم التعليمية الكم وهو كل ما يقبل الزيادة او الانقسام او القياس .  
فكل من الخط والوزن والعدد والوقت كم . وليس كذلك الالوان والافعال العقلية  
ونحوها

٢ جميع اقسام التعليمات مبني على الحساب والجبر والهندسة . اما الحساب فهو  
علم الاعداد . ومعرفته ضرورية لمعرفة ما سواء من هذه العلوم . واما الجبر فهو طريق  
للعد بواسطة احرف وعلامات اخرى . ويقال للطبقة العليا من حساب التفاضل  
وهو لا يدخل في كتب الجبر لسموه بل يقام علماً بنفسه . واما الهندسة فهي قسم من  
التعليمات موضوعه المتدار وهو كم ذو ابعاد اي كل ماله واحد من ثلاثة اشياء وهي  
الطول والعرض والعنى ويقال لها الابعاد الثلاثة . ولذلك يكون كل من الخط والسطح  
والجسم مقداراً دون الحركة فانها وان كانت كمّاً لكنها لا تعد مقداراً اذ ليس لها شيء من  
الابعاد المذكورة . واما حساب الثلاثات وقطع المخروط فيها علان تستعمل فيها القواعد

التعليمية لمعرفة المثلثات والمثلثات الحاصلة من قطع المخروط أي العليبي والثلجي والمثلثولي

٣ التعاليم نوعان محضة وإضافية أو مترجمة . أما المحضة فهي المختصة بالكميات المجردة عن المواد . وأما الإضافية فهي استخدام قواعد تعليمية لمعرفة شيء من خصائص الميولي أو لانعام شيء من المصالح اليومية كما في التجارة وعلم المصاحبة وعلم البصريات وعلم الهيئة ونحو ذلك

٤ ان للتعاليم المحضة منزلة على سائر العلوم من حيث وضوح قواعدها وقوة براهينها حتى ضرب بها المثل في الإيضاح والتبيين ومن حيث كثرة استعمالها وازدهارها في المصالح والعلوم كافة وإيضاً لسبب فعلها في ترويض القوى العقلية بتقويتها وتوسيعها . فان درسها يدرّب العقل على الاتجاه بكل قواه نحو امير ما وعلى انحصاره في موضوع بدون ان يشتت . ويمنح حفاقة عظيمة في الكشف عن فساد أو منسطة في برهان أو قضية . ولذلك تنيد معرفتها جداً لكل واحد ولو كان غير منتظر الى ممارسة علمائها وحُبَّت من العلوم الرياضية

— ٥٥١ —

## الفصل الأول

في الاشارات الجبرية والكميات السلبية والاوليات

٥ الجبر علم يُبحث فيه عن نسب الكميات باستعمال احرف وشاراتٍ أخرى . وله منزلة على علم الحساب بأن مماثله اعمّ ولأنه يُستخدَم فيه الاحرف العجائية عوضاً عن الاعداد كبيرة كانت ام صغيرة . وإيضاً لانه يُستخدَم فيه كميات مجهولة كانت معلومة . فالاحرف التي تنوب عن كميات عديدة في الجبر ليس لها قيمة في نفسها ولكن تُفرض لها قيمة معلومة في كل مسألة على مُنتضى شروطها . وقد تكون تلك القيمة معلومة وقد تكون مجهولة كما ستري . فان كانت معلومة يوضع عوضاً عنها حرف من حروف الهجاء الأول كالالف والباء والناء وما يليها . وان كانت مجهولة تستعمل عوضاً عنها الحروف الاخيرة كالكاف واللام والميم وما يليها وهذا امرٌ عادي لا ضروري

٦ الجمع بدل عليه خط عرضي ينطعمه خط عمودي هكذا + والطرح بدل عليه خط عرضي فقط هكذا - فالكميات التي تنقسمها العلامة الاولى تُسمى ايجابية . والتي

تقدمها الثانية يقال لها سلبية. والتي تقدمها كلها تسمى ملتبسة. فلو وضع  $ت + ب$   
 $- س$  كان المراد فضلة  $س$  ومجموع  $ت$  و  $ب$  وقراءت مع  $ب$  الآس. وإن  
 وضع  $ت + ب$  لقرئت مع  $ا$  أو  $آ$ . والتي لا تقدمها علامة تقدّر لها علامة  
 ايجابية اي علامة الجمع. ولو وضع  $ت - ب$  او  $س - د$  لكان المراد فضلة  
 $ت$  و  $ب$  او فضلة  $س$  و  $د$  بدون تعيين اي هو المطروح واي هو المطروح منه.  
 ويدل على المساواة بين كميتين خطان عرضيان متوازيان هكذا = فلو وضع  $ت +$   
 $ب = س - د$  لقرئ مجموع  $ت$  و  $ب$  يعدل فضلة  $س$  و  $د$ . ومثال ذلك في  
 الارقام الهندية  $٨ + ٤ = ١٦ - ٤ = ١٠ + ٢ = ١٢ + ٧ = ١٩$  ولو وضع  
 $ت < ب$  كان المراد ان كمية  $ت$  اعظم من كمية  $ب$ . وبالعكس  $ت > ب$

٧ اذا تقدم كمية رقم هكذا  $٣$  ت او  $٩$  ل او  $١٠$  ك كان المراد تكرار  
 الحرف مراراً تأمل الاحاد في ذلك الرقم. فيقرأ ثلاث مرات  $ت$  وتسع مرات  $ل$   
 وعشر مرات  $ك$  ويقال لذلك الرقم مسمى. وهكذا  $١٠٠$  م و  $١٠٠٠$  م فيراد ثلث ن  
 وثلاثة ارباع م. وإن لم يتقدم كمية مسمى بقدرها واحد مسمى. فان  $ت$  مثلاً  
 يراد به  $١$  ت. وقد يكون المسمى حرفاً هكذا م ك فيراد تكرار ك مراراً تأمل  
 الاحاد في م اي ميم مرة. ولو قيل  $٣$  ت ب لكان  $٣$  ت مسمى ب. ولو  
 قيل  $٤$  ك ل لكان  $٤$  ك ل مسمى د وفس على ذلك

٨ الكمية المركبة هي التي ارتبطت اجزاؤها بعلامة الجمع او الطرح. مثالها  $س +$   
 $د$  و  $ر + س - ك$  و  $٣$  ت +  $ب$ . وما سواها بسيطة. مثالها  $ت$  و  $رك$  و  $٢$  م  
 $س$  ل. وإن كانت لها جزآن سميت ثنائية مثل  $ت + ب$  و  $س - د$  وينال  
 للاخيرة فضلية ايضاً. وإن كان لها ثلاثة اجزاء يقال لها ثلاثية او ذات ثلاثة حدود.  
 او اربعة فرباعية او ذات اربعة حدود. ولم يجز. وإن أريد معاملة عدة اجزاء من  
 كمية مركبة معاملة واحدة يجب رسم خط فوقها او حصرها بين قوسين هكذا  $ت - د$   
 $+ س$  او  $(ت - د) + س$  فيراد اضافة  $س$  الى فضلة  $ت$  و  $د$  وهكذا  
 $ت + ب - س + د$  او  $(ت + ب) - (س + د)$  يراد به طرح مجموع  $س$   
 و  $د$  من مجموع  $ت$  و  $ب$ . ويقال لحرف او لعدة احرف مرتبطة على ما تقدم عبارة  
 جبرية

٩ يدل على الضرب خطان يتقاطعان هكذا  $X$  او نقطة بين المضروب  
 والمضروب فيه. مثالة  $ت X ب$  او  $ت . ب$  فيقرأ  $ت$  في  $ب$ . وهكذا



١٢ مكنوه كمية هو الخارج من قسمة واحد على تلك الكمية. فكنوه ت. مثلاً  
هو ت مكنوه ٤ هو ١/٤ ومكنوه ت + ب هو ت + ب

١٣ الكمية السلبية هي التي يجب طرحها. ففي التجارة مثلاً يكون الربح ايجابياً  
والخسارة سلبية. وإن كان صعود جسم عن سطح الارض ايجابياً يكون هبوطه سلبياً.  
وإن كان جري مركب الى الشمال ايجابياً يكون جريه الى الجنوب سلبياً. وقد يكون  
السلي أكبر من الايجابي الذي يجب الطرح منه كما اذا كان رأس مال تاجر ١٠٠٠  
دينار والدین عليه ١٥٠٠ دينار

١٤ الاولیة قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح. والاوليات التعاليمية التي يُحتاج  
اليها بالاكثير في هذه

- ١ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٢ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٣ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء متساوية تكون الحواصل متساوية
- ٤ اذا قُسمت اشياء متساوية على اشياء متساوية تكون الخوارج متساوية
- ٥ اذا أُضيفت كمية الى اخرى وطُرِحَت منها فالثانية لا تتغير
- ٦ اذا ضُرِبَت كمية في اخرى وانقسمت عليها فلا تتغير
- ٧ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المجموع

الاعظم

٨ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية يكون من الاعظم البقية

العظمى

٩ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء غير متساوية يكون من الاعظم الحاصل

الاعظم

١٠ اذا انقسمت اشياء غير متساوية على اشياء متساوية يكون من الاعظم الخارج

الاعظم

١١ الاشياء المتساوية لشيء واحد في متساوية بعضها لبعض

١٢ الكل اعظم من جزئه

## الفصل الثاني

في الجمع

١٥ الجمع هو ربط كميات بواسطة علاماتها. فلو قيل ما هو مجموع ت وب ون ل قيل ت + ب + ن ولو قيل اصف فضلة ب وس الى د ل قيل ب - س + د ولو قيل اصف فضلة ب وس الى فضلة ن ود ل قيل ب - س + ن - د وقس على ذلك

١٦ متى كانت الكميات متشابهة تُجمع الى واحدة. مثالة ٢ + ٦ + ٤ + ٥ + ٧ = ٢٥ ب فلنا من ذلك القاعدة الاولى للجمع

متى كانت الكميات متشابهة والعلامات متشابهة فاجمع المسميات واكتب عن يسار المجموع الاحرف المشتركة واعطيه العلامة المشتركة. وهذه امثلة للعمل

٧ ب + كى	٢ كى	ب س
٨ ب + ٢ كى	٧ كى	٢ ب س
٢ ب + ٢ كى	كى	٩ ب س
٦ ب + ٥ كى	٢ كى	٢ ب س
٢٢ ب + ١١ كى		١٥ ب س

س د كى + ٢ م	رى + ٢ ت ب ح
٢ س د كى + م	٢ رى + ت ب ح
٥ س د كى + ٧ م	٦ رى + ٤ ت ب ح
٧ س د كى + ٨ م	٢ رى + ت ب ح
١٥ س د كى + ١٦ م	

ومبكلا اذا كانت العلامات سلبية. مثالة



٢-ب- م	٢-ن-ك	٢-ب-س
٢-ب- م	٢-ن-ك	٢-ب-س
٧-ب- م	٢-ن-ك	٥-ب-س
١٠-ب- م		٩-ب-س

وهكذا لو كانت الكميات قوت متشابهة . مثاله

١٦-ب-د	٢-ب-س	٢-ب-د
٤-ب-د	٩-ب-س	٦-ب-د
٩-ب-د	٢-ب-س	٢-ب-س
٢-ب-د	٧-ب-س	٥-ب-د

١٧ لو قيل ما هو مجتمع ٦ ب وفضلة ٦ و٤ ب لنيل ٦-ب-٤ ب  
اي بسقط ٤ ب من ٦ ثم يضاف الى الفضلة ٦ ب وذلك كإضافة ٢ ب الى ٦  
ولو قيل ما هو مجتمع ٧ ب و-٢ ب لنيل ٧-ب-٢ ب اي ٥ ب فلنا من  
ذلك

القاعدة الثانية للجمع . وهي منى كانت الكميات متشابهة والعلامات  
غير متشابهة فاطرح المسمى الأصغر من الأكبر واكتب عن يسار الباقي  
الأحرف المشتركة واعطه علامة المسمى الأكبر وهذه صورة العمل

٢-ب-س	٤-ب	٦-ب
٧-ب-س	٦-ب	٤-ب
٢-ب-س		٢-ب

٢-ب-س	٤-ب	٦-ب
٧-ب-س	٦-ب	٤-ب
٢-ب-س		٢-ب

١٨ الكيتان المتعاويثان اذا كانت احدهما ايجابية والاخرى سلبية تُعني احدهما  
الاخرى . مثاله ٦-ب-٦-ب = . و ٦-ب-٦-ب = ١٨ .

لنفرض كيتين أكبرها ت وأصغرهما ب فيكون مجموعهما  $ت + ب$  وفضلتهما  $ت - ب$  ومجموع مجتمعهما وفضلتهما  $٢ \pm$  أي  $٢$  ولنا من ذلك هذه القضية العامة أي

ان أضيف مجموع كيتين إلى فضلتهما يكون المجموع مضاعف أكبرها

١٩ ان أريد جمع عدد من الكميات المتشابهة وكان بعضها إيجابياً وبعضها سلبياً فاجمع أولاً الإيجابية ثم السلبية حسب القاعدة الأولى (١٦) ثم افعل في المجموعين حسب القاعدة الثانية (١٧) فلو قيل اجمع  $١٢ ب + ٦ ب + ٤ ب - ٥ ب - ٧ ب$  لقبل

$$١٢ ب + ٦ ب + ٤ ب = ٢٠ ب$$

$$و-٥ ب - ٧ ب = -١٢ ب$$

وحسب القاعدة الثانية يكون المجموع  $-٤ ب$

ولو قيل اجمع  $٢ ك - ٢ ك + ٧ ك - ٤ ك - ٩ ك + ٧ ك$  لقبل  $٦ ك - ٤ ك$  لنقبل

الاجزاء الإيجابية هي  $٢ ك$  والسلبية  $-٤ ك$

$٢ ك$   $-٧ ك$

$٤ ك$   $-٩ ك$

$٧ ك$   $-٦ ك$

والمجموع  $١٦ ك$   $-٢٠ ك$

و  $١٦ ك - ٢٠ ك = -٤ ك$

اجمع  $٢ ت - ٦ ت + ٧ ت + ٢ ت - ٤ ت + ٩ ت - ٨ ت$

$-٤ ت$

اجمع  $٢ ب م - ٦ ب م - ٢ ب م + ٧ ب م$

اجمع  $٧ ب م - ٦ ب م + ٨ ب م - ٤ ب م - ٩ ب م + ٩ ب م$

٢. اذا كانت الكميات غير متشابهة لا تُجمع إلا بكتابتها على التوالي مع علاماتها.

مثال  $٤ ب - ٦ ي + ٢ ك + ١٧ ح - ٥ د + ٦$

وان كانت الكميات التي أريد جمعها بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة نكتب

المتشابهة بعضها تحت بعض ثم نُجمع على ما تقدم. فلو قيل اجمع  $٢ ب س - ٦ د +$

٢-٢-١-ب س ك - ٤د + ب ع + ٢د + ١ي + ٢ك + ب لكانت صورة  
العمل هكذا

$$\begin{array}{r} 22-26+27-28+29+30 \\ 22-26+27-28+29+30 \\ 22+ \end{array}$$

المجموع =  $7د - 2ب - 2أ + 4ك + 6ب$   
 اجمع 2ب م -  $2ك + 6ب + 1أ - 7ك + 5ه$  -  $1أ + 1$   
 اجمع 2ب م +  $8س + 4د - 5ه + 2ب - 4م + 2$   
 اجمع 2ك +  $1أ - 7ك + 8أ + 10ك - 5ه + 2م$   
 اجمع 2م +  $7ك - 1أ + 8أ + 10ك - 5ه + 2م$   
 اجمع 7ك ح +  $1د - 1أ + 10ك + 2ه + 17م - 1ك$   
 اجمع 7ك د -  $8ك + 1أ - 5ه + 2د + 7ك$   
 اجمع 2ب -  $2أ + 1ك + 2ب - 1أ + 2ك - 1ح$   
 اجمع 2ب -  $2ك + 2أ + 2ب - 1أ + 2ب$

## الفصل الثالث

### في الطرح

٢١ الطرح اسقاط كمية من أخرى ليعرف الفضل بينها

فلنفرض كمية  $t + b$

اطرح منها + ب فيكون الباقي ت

اضف اليها - ب فتصير ت + ب - ب

وبالاولية الخامسة ت+ب-ب يعدل ت

اي طرح كبة ايجامية من عبارة جبرية هو كاضافة سليمة تعادل المطروحة اليها

ولو فرض ت-ب

فان طُرح منها - ب بنی ت

وان أضيف إليها + ب صارت ت - ب + ب

ولكن ت - ب + ب يبدل ت  
اي طرح كمية سلبية هو كإضافة ايجابية تعادلا . فان كان على احد دين فرفعة  
عنه فهو بمثابة اضافة مبلغ الدين الى رأس المال . ونرى من الامثلة المتقدمة ان طرح  
كمية ايجابية انما يتم بتغيير علامتها . فلنا من ذلك هذه القاعدة للطرح

ابدل علامات الكميات المطروحة من + الى - او عكسه ثم افعل  
كما تقدم في الجمع . وهذه امثلة للعمل مع مشابهة العلامات اصلاً

من  $28 +$  ب  $16 +$  ا  $14$  دت  $28 -$  ب  $16 -$  ا  $14$  دت  
اطرح  $16 +$  ب  $12 +$  ا  $6$  دت  $16 -$  ب  $12 -$  ا  $6$  دت  
 $12 +$  ب  $4$  ا  $8$  دت  $12 -$  ب  $4 -$  ا  $8$  دت

ففي هذه الامثلة يتوّم بدل العلامات الايجابية بالسلبية وبالعكس  
٢٢ وهكذا متى تشابهت العلامات وكان المطروح اكبر من المطروح منه . مثاله

من  $16 +$  ب  $12 +$  ا  $6$  دت  $16 -$  ب  $12 -$  ا  $6$  دت  
اطرح  $28 +$  ب  $16 +$  ا  $14$  دت  $28 -$  ب  $16 -$  ا  $14$  دت  
 $12 -$  ب  $4 -$  ا  $8$  دت  $12 +$  ب  $4 +$  ا  $8$  دت

وهكذا متى اختلفت العلامات . مثاله

من  $28 +$  ب  $16 +$  ا  $14$  دت  $28 -$  ب  $16 -$  ا  $14$  دت  
اطرح  $16 -$  ب  $12 -$  ا  $6$  دت  $16 +$  ب  $12 +$  ا  $6$  دت  
 $44 +$  ب  $28$  ا  $20$  دت  $44 -$  ب  $28 -$  ا  $20$  دت

٢٣ امتحان الطرح في الجبر كما في الحساب اي باضافة الباقي الى المطروح .  
فان وافق المجموع المطروح منه كان العمل صحيحاً والا فهو فاسد  
تنبيه . عند الامتحان يجب اعادة العلامات الى اصلها . امثلة

من  $2$  كى -  $1$  ح  $2$  ب ك  
اطرح -  $ك$   $7 +$  ح  $9 -$  ب ك  
 $2$  كى -  $8$  ح  $4 -$  ح  $5 +$  ح  $5 -$  ح

من ن د - ٧ ب ي      ٢ ت ب م - ك ي      - ١٧ + ٤ ت ك  
 اطرح ٥ ن د - ب ي      ٧ ت ب م + ٦ ك ي      - ٢٠ - ت ك  
 ١٠ ت ب م - ٧ ك ي

من ت ك + ٧ ب      ٢ ت ح + ت ك ي  
 اطرح - ٤ ت ك + ١٥ ب      - ٧ ت ح + ت ك ي  
 ٥ ت ك - ٨ ب

٢٤ متى فُرِضَتْ عدة كميات متشابهة يجب جمعها أولاً ثم طرحها. مثالة  
 اوقيل من ت ب اطرح ٢ ت م + ت م + ٧ ت م + ٢ ت م + ٦ ت م اقل  
 ت ب - ١٩ ت م . ولو قيل من ي اطرح - ت - ت - ت - ت اقل ي  
 + ت + ت + ت + ت - ٤ ت م . ولو قيل من ت ك - ب س + ٢ ت ك  
 + ٧ ت ب س اطرح ٤ ب س - ٢ ت ك + ب س + ٤ ت ك اقل ٢ ت ك  
 + ب س

من ت د + ٢ د س - ب ك اطرح ٢ ت د + ٧ ب ك - د س + ت د  
 ٢٥ متى كانت الكميات غير متشابهة تطرح بكتابتها على التوالي بعد تبديل  
 علاماتها. فلو قيل من ٢ ت ب + ٨ م - ي + د ح اطرح ك - در + ٤ ح ي  
 - ب م ك اقل ٢ ت ب + ٨ م - ي + د ح - ك + در - ٤ ح ي + ب م ك  
 ٢٦ اذا وُضِعَتْ علامة الطرح فقام كميات معصورة بين قوسين يجب عدد رفع  
 القوسين تبديل علامات جميع الكميات المنصورة. فلو وُضِعَتْ - (ب - س + د)  
 كان المراد ان ب و - س و + د يجب طرحها جميعاً من ت . ويتم العمل برفع  
 القوسين وتبديل العلامات فتصير ت - ب + س - د وهكذا

١٢ ت د + ك ي + د - (٧ ت د - ك ي + د + ح م - ر ي) = ٦ ت د +  
 ٢ ك ي - ح م + ر ي

٧ ت ب س - ٨ + ٧ ك - (٢ ت ب س - ٨ - د ك + ر) = ٤ ت ب س  
 + ٧ ك + د ك - ر

٢ ت د + ح - ٢ ي - (٧ ي + ٢ ح - م ك + ٤ ت د - ح ي - ت د) =  
 ٦ ت م - د ي - ٨ - (١٦ د ي - ٨ - ت م - ي + ر) =

٢٧ كى - ٢ك + ٥ - (٤ + ح - ت + ك + ٢ب) =  
وبالعكس متى أريد حصر كميات بين قوسين . مثالة - م + ب - دك + ٢ح  
فاذا انحصرت للطرح نصير - (م - ب + دك - ٢ح)

—

## الفصل الرابع

### في الصرب

٢٧ الضرب اما ان يكون في الصحيح وهو تكرار المضروب مراراً ثمائل الآحاد  
الموجودة في المضروب فيه واما ان يكون في الكسر وهو اخذ جزء مفروض من المضروب  
مراراً ثمائل اجزاء الواحد الموجودة في المضروب فيه . فان كان المضروب فيه واحداً  
كان الحاصل مساوياً للمضروب فيه . وان كان أكثر من واحد كان الحاصل أكثر  
من المضروب فيه . وان كان أقل من واحد كان الحاصل أقل من المضروب فيه

٢٨ او فرض ان يضرب ت في ب وفرضت للباء قيمة ثلاثة مثلاً لا تنفى  
اخذ ت ثلاث مرات اي ت + ت + ت = ٣ت او بت فتدري ان  
الاحرف تُضرب بكتابتها متوالية بوسط علامة الصرب او بدونها . فيكون ب في س  
ب X س او ب س وهكذا تكاثرت الاحرف . ولا فرق في ترتيبها لان  
س د م = د م س = م د س كما ان ٢ X ٢ X ٢ = ٢ X ٢ X ٢ = ٢ X ٢ X ٢  
وان كان للاحرف سميات عديدة يجب ضربها ابتداءً ثم بوضع حاصلها قدام حاصل  
الاحرف . مثالة ٢ب X ٢ب = ٦ب

اضرب ١ ت ب	١٢ ح ي	٢ د ح
في ٢ كى	٢ رك	م ي
٢٧ بت كى		٢ ح د م ي

اضرب ٦ ت د	٧ ب د ح	٢ ت ي
في ١٢ ح ع	ك	٨ م ك
	٧ ب ح د ك	

ح ي	٢٦	اضر ب ٢ ت ب
<u>٢٤</u>	<u>ك ٢</u>	<u>٤</u> في
٢٤ ح ي	٧٢ ك	١٢ ت ب

٢٦ اذا كان المضروب كمية مركبة يجب ضرب كل جزء منه في المضروب فيو.

مثاله

ح ٢ + م	اضر ب د + ك ي
<u>٦ د ي</u>	<u>٢ ب</u> في
	٢ ب د + ٦ ب ك ي
ح ٢ + م + ٢ + د ر	اضر ب ح ٢ + ل ١
<u>٤ ب</u>	<u>م ي</u> في
	٢ ح ل م ي + م ي

٢٠ اذا كان كل واحد من المضروب والمضروب فيو كمية مركبة يجب ضرب

كل جزء من الواحد في كل جزء من الآخر. مثاله

٤ ت ي + ٢ ب	اضر ب ٢ ك + د
<u>٢ س + ٢ ك</u>	<u>٢ ت + ح م</u> في
	٦ ت ك + ٢ ت د + ٢ ح ك م + ح د م
	اضر ب ١ + ت
	<u>٢ ك + ٤</u> في
	٢ ت ك + ٢ ك + ٤ ت + ٤

اضر ب ح ٢ + ٧ في ٧ + د ١

الجواب ١٢ د ح + ٤ د ٢ + ح ٢ + ٧

اضر ب د ي + ر ك + ح في ٦ + م + ٤ + ٧

اضر ب ٧ + ٦ ب + ت د في ٢ + ر + ٤ + ح ٢

إذا كان في الحاصل كيات متشابهة يجب كتابتها بعضها تحت بعض ثم جمعا  
وهذه صورة العمل

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ب} + \text{ت} \\
 \text{في} \quad \text{ب} + \text{ت} \\
 \hline
 \text{بب} + \text{بت} \\
 + \text{بت} + \text{تت} \\
 \hline
 \text{بب} + \text{ب} + \text{ت} + \text{تت}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ب} + \text{س} + \text{ت} \\
 \text{في} \quad \text{ب} + \text{س} + \text{ت} \\
 \hline
 \text{بب} + \text{بس} + \text{ب} + \text{ت} \\
 + \text{بس} + \text{ست} + \text{تس} + \text{تت} \\
 \hline
 \text{بب} + \text{ب} + \text{بس} + \text{ت} + \text{ست} + \text{تس} + \text{تت}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ت} + \text{ي} + \text{ا} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{ح} \\
 \text{اضرب } \text{ت} + \text{د} + \text{ا} \text{ في } \text{ت} + \text{د} + \text{ا} \\
 \text{اضرب ب} + \text{س} + \text{د} \text{ في } \text{ب} + \text{س} + \text{د} \\
 \text{اضرب } \text{ب} + \text{ك} + \text{ح} \text{ في } \text{ت} + \text{د} + \text{ا} \\
 \text{اضرب } \text{ت} + \text{د} + \text{ا} \text{ في } \text{ت} + \text{د} + \text{ا} \\
 \text{اضرب } \text{ب} + \text{ك} + \text{ح} \text{ في } \text{ت} + \text{د} + \text{ا}
 \end{array}$$

الجواب ٤٨ ب د ك + ٢٤ ب د

٢١ لا ينبغي اننا اذا ضرب  $X^4$  ت يكون الحاصل  $٤ت$  واذا ضرب  $X^4$  - ت يجب تكرار - ت اربع مرات . او - ت - ت - ت - ت =  $-٤ت$  واذا ضرب  $-X^4$  ت يكون الحاصل  $+٤ت$  و  $+٤ت$  ولكن العلامة العملية للاربعة تدل على وجوب الطرح وذلك يتم بجديل العلامات فتصير  $-٤ت$  واذا ضرب  $-X^4$  - ت يكون الحاصل  $-٤ت$  و  $-٤ت$  ولكن يجب تبديل العلامة فتصير  $+٤ت$  ولنا من ذلك انه



ان ضرب + في + يكون الحاصل +  
وان ضرب - في - يكون الحاصل +  
وان ضرب + في - يكون الحاصل -  
وان ضرب - في + يكون الحاصل -

اي متى تشابهت علامات المضروب والمضروب فيه تكون علامة  
الحاصل ايجابية. ومتى اختلفت تكون علامته سلبية

اضرب ب - ٢ ت  
في ٦ ي  
٢ ت - م  
٢ ح + ك  
ب ي - ١٨ ا ت ي

اضرب ح - ٢ د - ٤  
في ٢ ا ي  
ت - ٢ د - ٧ د - ك  
٢ ب + ح  
٢ ح ي - ٦ د ي - ٨ ي

اضرب ت + ب  
ب - ك  
٢ د ي + ح ك + ٢  
م ر - ت ب  
ب ت + ب ب - ت ك - ب ك

اضرب ٢ ح + ٢  
في ت د - ٦  
٢ ت ح د + ٢ ت د - ١٨ ح - ١٨

اضرب ت - ٤ في ٢ ب - ٦ = ٢ ت ب - ١٢ ب - ٦ ت + ٢٤  
اضرب ٢ ت ي - ب في ٦ ك - ١ - ١٨ ا ت ك ي - ٦ ب ك - ٢  
ت ي + ب

اضرب ٢ د - ح ي - ٢ ك في ٤ ب - ٧  
اضرب ٢ ت د - ت ح - ٧ في ٤ د ي - ح ر  
اضرب ٢ ح ي + م - ١ في ٤ د - ٢ ك + ٢

٢٢ قد رأينا ان حاصل كيتين سليتين ايجابى. فان ضرب هذا الحاصل في كمية سلبية يكون الحاصل سلبياً. وان ضرب الحاصل الاخير في كمية سلبية يكون الحاصل ايجابياً. وعلى الاطلاق ان كان عدد الكميات السلبية وتراً يكون الحاصل سلبياً. وان كان شفعاً يكون الحاصل ايجابياً. اما الكميات الارباعية فحاصلها ايجابية ابداً

٢٣ قد يحدث في الضرب ان الكميات الارباعية والسلبية يفي بعضها بعضاً حتى نخرج من الحاصل برمتها. مثالة

اضرب ت - ب  
في ت + ب  
م + م - م - م

ت - ت - ب

ت + ب - ب - ب

ت - ب - ب

اضرب ت + ت + ب + ب  
في ت - ب

ت + ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب

ت - ت - ب - ب - ب - ب - ب - ب

ت - ت - ب - ب - ب - ب - ب - ب

٢٤ يكفي احياناً الدلالة على الضرب بعلائق من دون انما هو حقيقة. فلو قيل

اضرب ت + ب + س في ح + م + ي ل قيل (ت + ب + س) × (ح + م + ي)

٢٥ لنا ما تقدم ذكره هذه القاعدة العامة للضرب

اضرب جميع احرف المضروب ومسمياتها في جميع احرف المضروب فيه ومسمياتها واجعل لكل جزء من الحاصل العلامة المطلوبة على القاعدة السابقة ان العلامات المتشابهة يحصل منها ايجاباً والختلفة يحصل منها سلباً. مثالة

- اضرب ت + ب - ٢ في ٤ - ت - ٦ ب - ٤  
 اضرب ٤ ت ب X ك X ٢ في ٣ م ي - ١ + ح  
 اضرب (٧ ت ح - ي) X في ٤ ك X ٢ X ٥ X د  
 اضرب (٦ ت ب - ح د + ١) X في (٨ ك - ١) X د  
 اضرب ٢ ت ي + ي - ٤ ح في (د + ك) X (ح + ي)  
 اضرب ٦ ت ك - (٤ ح - د) في (ب + ١) X (ح + ١)  
 اضرب ٧ ت ي - ١ + ح X (د - ك) في - (٣ + ٤ م د)

## الفصل الخامس

### في القسمة

٢٦ القسمة طريقة لاستخراج عدد من آخر اذا ضرب في المقسوم عليه بمحصل المقسوم. وقد يكون المقسوم والمقسوم عليه عددين وقد يكونان حروفاً. فلو قسم ت ب د على ت لكان الخارج ب د لان ب د X ت = ت ب د

فنرى من ذلك انه متى وُجد المقسوم عليه بين اجزاء المقسوم نتم القسمة باخراج ذلك الجزء من الكمية. امثلة

اقسم س ك	د ح	د ك	ح م ي	د ح ك ي
على س	د	د ر	ح م	د ي
الخارج ك		ك		ك ح

اقسم ت ب س د	ت ب ك ي	د ت ب
على ب	ت ك	ت
الخارج	ب ي	ت ب

اقسم ب ب ك	ت ت د د ك	ت ت م م ي
على ب	ت د	ت م ي
الخارج ب ك	ت د د ك	

اقسم	ت ت ت ك ك ح	ى ى ى
	ت ت ك ك	ى ى
	ت ك ح	

وعلى الاطلاق مها كانت اجزاء المقسوم يكون اخراج احدها كالقسمة عليه . . مثاله

اقسم	ت (ب + د)	ت (ب + د)	ن (م + ى)
على	ت	ب + د	ن + م
الخارج	ب + د	ت	ى

اقسم	(ب + ك) (س + د)	(ب + ى) X (د - ح) ك
على	ب + ك	د - ح
	س + د	(ب + ى) ك

٢٧ اذا كانت للكليات مسميات عددية يجب ان نقسم ايضاً ثم يجمل الخارج فلام  
الخارج من قيمة الاحرف . مثاله

اقسم	٦ ت ب	١٦ د ك ى	٢٥ د ح ر	١٢ ك ى
على	٢ ب	٤ د ك	د ح	٦
الخارج	٣ ت		٢٥ ر	

اقسم	٢٤ د ر ك	٢٠ ح م
على	٢٤	٢
الخارج	د ر ك	

٢٨ اذا ضربت كمية بسيطة في كمية مركبة تدخل البسيطة في كل جزء من  
الحاصل (٢٩) فيمكن فكّه الى ضلعيه المضروب والمضروب فيه . مثاله

ت ب + ت د	ت تفك الى ت X (ب + د)
ت ب + ت س + ت ح	ت تفك الى ت X (ب + س + ح)

ت م ح + ت م ك + ت م ي تنفك الى ت م X (ح + ك + ي)  
 ٤ ت د + ٨ ت ح + ١٢ ت م + ٤ ت ي تنفك الى ٤ ت X (د + ح + م + ي)

فان انتسبت الكمية على احد هذين الضامنين يكون الخارج الضلع الآخر. مثاله

(ت ب + ت د) : ت = ب + د و (ت ب + ت د) + (ب د) = ت

اقسم ب د ح + ب د ي	ت ت ح + ت ي
على ب د	ت
الخارج	ت ح + ي

اقسم درك + د ح ك + د ك ي	٦ ت ب + ١٢ ت س
على د ك	٢ ت
	٢ ب + ٤ س

اقسم ١٠ ادرى + ١٦ د	١٢ ح ك + ٨ د	٢٥ د م + ١٤ ا د ك
على ٢ د	٤	٧ د
الخارج ٥ رى + ٨	٢ ح + ٢	

اقسم ت ب + ت س + ت ح	ت م ح + ت م ك + ت م ي
على ب + س + ح	ح + ك + ي
الخارج ت	

اقسم ٤ ت ب + ٨ ت ي	ت ح م + ت ح ي
على ب + ي	م + ي
الخارج ٤ ت	

٢٦ اذا كان كل من المقسوم والمقسوم عليه ايجابيا او سلبيا يكون الخارج ايجابيا .  
 وان كان احدهما ايجابيا والآخر سلبيا يكون الخارج سلبيا . وذلك واضح مما تقدم ان  
 حاصل الخارج في المقسوم عليه هو المقسوم نفسه (٢٦) فيكون



اقسم  $٢م + ٢ي$  على  $٢م + ٢ي$   
 الخارج  $٢م + ٢ي$

٤٢ الخارج من قسمة كثيرة على نفسه هو واحد أبداً . مثاله  
 $١ = ١$  و  $١ = ١$  و  $١ = ١$

اقسم  $٢ت + ٢ك$  على  $٢ت + ٢ك$   
 الخارج  $٢ت + ٢ك$

اقسم  $١٢ت + ١٢ي + ٦ت + ٦ك - ١٨ب + ٢٤ب$  على  $٦ب$   
 اقسم  $١٦ت - ١٢ت + ٨ي + ٤ - ٢٠ت + ٢٠ك + ٤م$  على  $٤$   
 اقسم  $(٢٢ - ٢٢) \times (٢م + ٢ي) \times ك$  على  $(٢٢ - ٢٢) \times (٢م + ٢ي)$   
 اقسم  $٢ت + ٢د - ٢ت + ٢ي - ٢ت$  على  $٢ت + ٢د - ٢ت + ٢ي - ٢ت$   
 اقسم  $٢ت + ٢ي + ٢م + ٢ك - ٢م - ٢د$  على  $٢م + ٢ك - ٢م - ٢د$   
 اقسم  $٢ت + ٢د - ٢ت + ٢ر - ٢ت + ٢د$  على  $٢ت + ٢د - ٢ت + ٢ر - ٢ت + ٢د$   
 اقسم  $٦ت + ٢ك - ٢ك + ٢ي + ٤ - ٢ت + ٢ي$  على  $٢ت + ٢ي + ٤ - ٢ت + ٢ي$   
 نبيه . اذا كان المقسوم عليه مركبة سباني ذكره عند الكلام على المعاد الأكبر

—xox—

## الفصل السادس

في الكسور

٤٣ اذ كان كثير من خصائص الكسور يُعرف من علم الحساب اقتصرنا هنا على ما يتعلق منها بالاعمال الجبرية . فنقول

٤٤ قيمة الكسري الخارج من قسمة الصورة على المخرج . فقيمة  $\frac{٢}{٣}$  هي  $\frac{٢}{٣}$  وقيمة

٤٥ في ت فقد وضع اذا انه ما تغير الكسر فان بقي ملا الخارج على حاله لم يتغير  
 قيمة الكسر. مثاله  $\frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$  ولم جراً لان  
 الخارج من كل هذه الكسور انما هو اثنان

٤٥ اذا بقي مخرج كسر على حاله كان ضرب الصورة في كميّة كضرب القيمة  
 في تلك الكمية وقسمه الصورة كنقطة القيمة. مثاله  $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٥}$   
 الى آخره. فالخارج في ب ٣ ب ٧ ب ١٢ الى آخره  
 واذا بقيت صورة كسر على حالها فضرب المخرج في كميّة هو كنقطة القيمة على تلك  
 الكمية وقسمه المخرج كضرب القيمة. مثاله  $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٥}$   
 فالخارج في ٤ ت ٨ ت ٢٤ ت

فدري ان قيمة الصورة كضرب المخرج وضرب الصورة كنقطة المخرج

٤٦ نرى ايضاً ما تقدّم انه اذا ضربت الصورة والمخرج كلاهما في كميّة واحدة ان  
 انفسا على كميّة واحدة لا تتغير قيمة الكسر. مثاله  $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٤} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$   
 $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٤} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

٤٧ ان قيمة  $\frac{٢}{٣}$  هي ت وقيمة  $\frac{٢}{٣}$  هي - ت وى  $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$   
 ي + ت وى -  $\frac{٢}{٣} =$  - ت فدري ان قيمة الكسر تتغير من + الى -  
 وبالعكس بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر كما  
 حسبنا تقدّم (٢٩)  $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$  و - ت و - ت و - ت و - ت  
 - ت - س ولكن  $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$  و - ت و - ت و - ت و - ت

فدري ان قيمة الكسر تتغير من + الى - وعكسه بتبديل جميع علامات الصورة.  
 اذا تغيرت علامات المخرج فلنا ايضاً كما تقدّم  $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$  و - ت و - ت  
 فلنا ما تقدّم هذه القضية العامة ان قيمة الكسر تتغير من + الى -  
 او عكسه بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر او بتبديل جميع علامات  
 الصورة. او جميع علامات المخرج

ثم ان  $\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$  وى -  $\frac{٢}{٣} =$  - ت وى + ت اي اذا تغيرت  
 العلامات من + الى - او عكس ذلك في موضعين من المواضع المذكورة سابقاً



لا تتغير قيمة الكسر. وان تغيرت العلامات في المواضع الثلاثة تتغير القيمة. وذلك حسبما

نقدم في (٢٣) و (٢٩) مثاله  $\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = -\frac{1}{-2}$

ولنا من ذلك طرق مختلفة لكتابة الخارج مغالما (ت - س)  $\div$  ب =  $\frac{ت}{ب}$  +  $\frac{س}{ب}$  او  $\frac{ت}{ب} - \frac{س}{ب}$  والاخيرة هي الأكثر استعمالاً

### نبذة في الاختزال والتجسس

٤٨ الكسر يتحول الى بحد بقسمة الصورة والخارج كليهما على كية تعدها. مثاله  $\frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 1} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{-2} = \frac{1 \div 1}{-2 \div 1} = -\frac{1}{2}$  وهكذا  $\frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 1} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{-2} = \frac{1 \div 1}{-2 \div 1} = -\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 1} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{-2} = \frac{1 \div 1}{-2 \div 1} = -\frac{1}{2}$  (٢٨)

اذا وجد حرف في كل جزء من الصورة والخارج يمكن اخراجه من الجميع (٢٨) مثاله

$$\frac{100}{100} = \frac{100 \div 100}{100 \div 100} = \frac{1}{1} \quad \text{و} \quad \frac{100}{100} = \frac{100 \div 100}{100 \div 100} = \frac{1}{1}$$

٤٩ الكسور تتحول الى مخرج مشترك بضرب كل صورة في جميع الخارج الا مخرجها لاييجاد صورة جديدة والخارج جميعاً بعضها في بعض لاييجاد المخرج المشترك. وهذا العمل يقال له التجسس. ولا تتغير بذلك قيمة الكسر لان الصورة والخارج يضربان في كية واحدة (٤٦)

فلو قبل جنس  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{6}$   $\frac{1}{7}$   $\frac{1}{8}$   $\frac{1}{9}$   $\frac{1}{10}$   $\frac{1}{11}$   $\frac{1}{12}$   $\frac{1}{13}$   $\frac{1}{14}$   $\frac{1}{15}$   $\frac{1}{16}$   $\frac{1}{17}$   $\frac{1}{18}$   $\frac{1}{19}$   $\frac{1}{20}$   $\frac{1}{21}$   $\frac{1}{22}$   $\frac{1}{23}$   $\frac{1}{24}$   $\frac{1}{25}$   $\frac{1}{26}$   $\frac{1}{27}$   $\frac{1}{28}$   $\frac{1}{29}$   $\frac{1}{30}$   $\frac{1}{31}$   $\frac{1}{32}$   $\frac{1}{33}$   $\frac{1}{34}$   $\frac{1}{35}$   $\frac{1}{36}$   $\frac{1}{37}$   $\frac{1}{38}$   $\frac{1}{39}$   $\frac{1}{40}$   $\frac{1}{41}$   $\frac{1}{42}$   $\frac{1}{43}$   $\frac{1}{44}$   $\frac{1}{45}$   $\frac{1}{46}$   $\frac{1}{47}$   $\frac{1}{48}$   $\frac{1}{49}$   $\frac{1}{50}$   $\frac{1}{51}$   $\frac{1}{52}$   $\frac{1}{53}$   $\frac{1}{54}$   $\frac{1}{55}$   $\frac{1}{56}$   $\frac{1}{57}$   $\frac{1}{58}$   $\frac{1}{59}$   $\frac{1}{60}$   $\frac{1}{61}$   $\frac{1}{62}$   $\frac{1}{63}$   $\frac{1}{64}$   $\frac{1}{65}$   $\frac{1}{66}$   $\frac{1}{67}$   $\frac{1}{68}$   $\frac{1}{69}$   $\frac{1}{70}$   $\frac{1}{71}$   $\frac{1}{72}$   $\frac{1}{73}$   $\frac{1}{74}$   $\frac{1}{75}$   $\frac{1}{76}$   $\frac{1}{77}$   $\frac{1}{78}$   $\frac{1}{79}$   $\frac{1}{80}$   $\frac{1}{81}$   $\frac{1}{82}$   $\frac{1}{83}$   $\frac{1}{84}$   $\frac{1}{85}$   $\frac{1}{86}$   $\frac{1}{87}$   $\frac{1}{88}$   $\frac{1}{89}$   $\frac{1}{90}$   $\frac{1}{91}$   $\frac{1}{92}$   $\frac{1}{93}$   $\frac{1}{94}$   $\frac{1}{95}$   $\frac{1}{96}$   $\frac{1}{97}$   $\frac{1}{98}$   $\frac{1}{99}$   $\frac{1}{100}$

ثم بعد التجسس تختزل الكسور ان كان ذلك ممكناً

٥٠ الكية المختلطة من صحيح وكسر تتحول الى كسر غير حقيقي بان نجعل الصحيح مخرجاً هو واحد. ثم نفعل كما تقدم. مثاله  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{6}$   $\frac{1}{7}$   $\frac{1}{8}$   $\frac{1}{9}$   $\frac{1}{10}$   $\frac{1}{11}$   $\frac{1}{12}$   $\frac{1}{13}$   $\frac{1}{14}$   $\frac{1}{15}$   $\frac{1}{16}$   $\frac{1}{17}$   $\frac{1}{18}$   $\frac{1}{19}$   $\frac{1}{20}$   $\frac{1}{21}$   $\frac{1}{22}$   $\frac{1}{23}$   $\frac{1}{24}$   $\frac{1}{25}$   $\frac{1}{26}$   $\frac{1}{27}$   $\frac{1}{28}$   $\frac{1}{29}$   $\frac{1}{30}$   $\frac{1}{31}$   $\frac{1}{32}$   $\frac{1}{33}$   $\frac{1}{34}$   $\frac{1}{35}$   $\frac{1}{36}$   $\frac{1}{37}$   $\frac{1}{38}$   $\frac{1}{39}$   $\frac{1}{40}$   $\frac{1}{41}$   $\frac{1}{42}$   $\frac{1}{43}$   $\frac{1}{44}$   $\frac{1}{45}$   $\frac{1}{46}$   $\frac{1}{47}$   $\frac{1}{48}$   $\frac{1}{49}$   $\frac{1}{50}$   $\frac{1}{51}$   $\frac{1}{52}$   $\frac{1}{53}$   $\frac{1}{54}$   $\frac{1}{55}$   $\frac{1}{56}$   $\frac{1}{57}$   $\frac{1}{58}$   $\frac{1}{59}$   $\frac{1}{60}$   $\frac{1}{61}$   $\frac{1}{62}$   $\frac{1}{63}$   $\frac{1}{64}$   $\frac{1}{65}$   $\frac{1}{66}$   $\frac{1}{67}$   $\frac{1}{68}$   $\frac{1}{69}$   $\frac{1}{70}$   $\frac{1}{71}$   $\frac{1}{72}$   $\frac{1}{73}$   $\frac{1}{74}$   $\frac{1}{75}$   $\frac{1}{76}$   $\frac{1}{77}$   $\frac{1}{78}$   $\frac{1}{79}$   $\frac{1}{80}$   $\frac{1}{81}$   $\frac{1}{82}$   $\frac{1}{83}$   $\frac{1}{84}$   $\frac{1}{85}$   $\frac{1}{86}$   $\frac{1}{87}$   $\frac{1}{88}$   $\frac{1}{89}$   $\frac{1}{90}$   $\frac{1}{91}$   $\frac{1}{92}$   $\frac{1}{93}$   $\frac{1}{94}$   $\frac{1}{95}$   $\frac{1}{96}$   $\frac{1}{97}$   $\frac{1}{98}$   $\frac{1}{99}$   $\frac{1}{100}$

والكسر غير الحقيقي بالعكس يتحول الى كية مختلطة بقسمة الصورة على المخرج. مثاله  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{6}$   $\frac{1}{7}$   $\frac{1}{8}$   $\frac{1}{9}$   $\frac{1}{10}$   $\frac{1}{11}$   $\frac{1}{12}$   $\frac{1}{13}$   $\frac{1}{14}$   $\frac{1}{15}$   $\frac{1}{16}$   $\frac{1}{17}$   $\frac{1}{18}$   $\frac{1}{19}$   $\frac{1}{20}$   $\frac{1}{21}$   $\frac{1}{22}$   $\frac{1}{23}$   $\frac{1}{24}$   $\frac{1}{25}$   $\frac{1}{26}$   $\frac{1}{27}$   $\frac{1}{28}$   $\frac{1}{29}$   $\frac{1}{30}$   $\frac{1}{31}$   $\frac{1}{32}$   $\frac{1}{33}$   $\frac{1}{34}$   $\frac{1}{35}$   $\frac{1}{36}$   $\frac{1}{37}$   $\frac{1}{38}$   $\frac{1}{39}$   $\frac{1}{40}$   $\frac{1}{41}$   $\frac{1}{42}$   $\frac{1}{43}$   $\frac{1}{44}$   $\frac{1}{45}$   $\frac{1}{46}$   $\frac{1}{47}$   $\frac{1}{48}$   $\frac{1}{49}$   $\frac{1}{50}$   $\frac{1}{51}$   $\frac{1}{52}$   $\frac{1}{53}$   $\frac{1}{54}$   $\frac{1}{55}$   $\frac{1}{56}$   $\frac{1}{57}$   $\frac{1}{58}$   $\frac{1}{59}$   $\frac{1}{60}$   $\frac{1}{61}$   $\frac{1}{62}$   $\frac{1}{63}$   $\frac{1}{64}$   $\frac{1}{65}$   $\frac{1}{66}$   $\frac{1}{67}$   $\frac{1}{68}$   $\frac{1}{69}$   $\frac{1}{70}$   $\frac{1}{71}$   $\frac{1}{72}$   $\frac{1}{73}$   $\frac{1}{74}$   $\frac{1}{75}$   $\frac{1}{76}$   $\frac{1}{77}$   $\frac{1}{78}$   $\frac{1}{79}$   $\frac{1}{80}$   $\frac{1}{81}$   $\frac{1}{82}$   $\frac{1}{83}$   $\frac{1}{84}$   $\frac{1}{85}$   $\frac{1}{86}$   $\frac{1}{87}$   $\frac{1}{88}$   $\frac{1}{89}$   $\frac{1}{90}$   $\frac{1}{91}$   $\frac{1}{92}$   $\frac{1}{93}$   $\frac{1}{94}$   $\frac{1}{95}$   $\frac{1}{96}$   $\frac{1}{97}$   $\frac{1}{98}$   $\frac{1}{99}$   $\frac{1}{100}$

## نبذة في جمع الكسور

٥١ تجمّع الكمور بكتابتها على الدولي مع علاماتها حسباً تقدم في جمع الصحيح أو بقولها الى مخرج مشترك ثم تجعل جميع العلامات المتقدمة عليها ايجابية . ثم تجمع الصور ويوضع المجمع فوق المخرج المشترك

تنبيه . عند تبديل العلامات يجب الاحتراس من تغيير قيمة الكسر (٤٧)

[illegible]

## نبذة في طرح الكسور

٥٢ طرح الكسور غير علامة المطروح من + الى - او عكسه  
ثم افعّل كما تقدّم في الجمع

تنبيه . نارةً يحجب تغيير علامة الصورة ونارةً العلامة المتقدمة على الكمر كلو اكي  
نكون هذه الاعبرة ايجابية

فلو قيل من  $\frac{ب}{ب}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  لنيل  $\frac{ب}{م} - \frac{ح}{م}$  ثم بالحويل الى مخرج مشترك  
 $\frac{ب}{ب} - \frac{ح}{م} = \frac{ب \times م - ح \times ب}{ب \times م}$  وبالجمع  $\frac{ب \times م - ح \times ب}{ب \times م}$   
 من  $\frac{ب}{ب} + \frac{ب}{م} = \frac{ب \times م + ب}{ب \times م}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times م + ب - ح \times م}{ب \times م}$   
 من  $\frac{ب}{ب} - \frac{ب}{م} = \frac{ب \times م - ب}{ب \times م}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times م - ب - ح \times م}{ب \times م}$   
 من  $\frac{ب}{ب} + \frac{د}{د} = \frac{ب \times د + د}{ب \times د}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د + د - ح \times م}{ب \times د}$   
 من  $\frac{ب}{ب} - \frac{د}{د} = \frac{ب \times د - د}{ب \times د}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د - د - ح \times م}{ب \times د}$   
 من  $\frac{ب}{ب} + \frac{د}{د} = \frac{ب \times د + د}{ب \times د}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د + د - ح \times م}{ب \times د}$   
 من  $\frac{ب}{ب} - \frac{د}{د} = \frac{ب \times د - د}{ب \times د}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د - د - ح \times م}{ب \times د}$

٥٣ نُطَرِّحُ الكسور ايضا مثل الصحيح بكتابهم المتواليه بعد تبديل العلامة .  
 فلو قيل اطرح  $\frac{ب}{ب} - \frac{ح}{م}$  من  $\frac{ح}{م}$  لنيل  $\frac{د}{م} + \frac{ح}{م}$   
 اما طرَح الكسر من صحيح او عكسه فهو بان نجعل الصحيح مخرجاً هو واحد ثم نعمل  
 كما تقدم

من  $\frac{ح}{م}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{م - ح}{م}$   
 من  $\frac{د}{م} + \frac{ب}{ب} = \frac{د \times ب + ب}{د \times ب}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{د \times ب + ب - ح \times م}{د \times ب}$   
 من  $\frac{ب}{ب} + ١ = \frac{ب + ب}{ب}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب + ب - ح \times م}{ب}$   
 من  $\frac{ب}{ب} + \frac{ح}{م} = \frac{ب \times م + ح}{ب \times م}$  اطرح  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times م + ح - ح \times م}{ب \times م}$

### نبة في ضرب الكسور

٥٤ ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في بعض  
 لايجاد صورة جديدة . والمخرج بعضها في بعض لايجاد مخرج جديد . مثالة

$\frac{ب}{ب} \times \frac{د}{م} = \frac{ب \times د}{ب \times م}$  و  $\frac{د}{م} \times \frac{ح}{م} = \frac{د \times ح}{م \times م}$   
 اضرب  $\frac{ب}{ب} \times \frac{د}{م} = \frac{ب \times د}{ب \times م}$  في  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د \times ح}{ب \times م \times م}$   
 اضرب  $\frac{ب}{ب} \times \frac{د}{م} = \frac{ب \times د}{ب \times م}$  في  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د \times ح}{ب \times م \times م}$   
 اضرب  $\frac{ب}{ب} \times \frac{د}{م} = \frac{ب \times د}{ب \times م}$  في  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د \times ح}{ب \times م \times م}$   
 اضرب  $\frac{ب}{ب} \times \frac{د}{م} = \frac{ب \times د}{ب \times م}$  في  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د \times ح}{ب \times م \times م}$   
 اضرب  $\frac{ب}{ب} \times \frac{د}{م} = \frac{ب \times د}{ب \times م}$  في  $\frac{ح}{م}$  الجواب  $\frac{ب \times د \times ح}{ب \times م \times م}$

٥٥ يُخْتَصَرُ الضرب باخراج الكميات المتساوية من الصور والمخرج فيستغنى



لا تتغير فان ضرب المقسوم أولاً في المقسوم عليه بعد قلبه ثم في نفس المقسوم عليه يكون  
الحاصل الاخير مساوياً للمقسوم. اما القسمة فهي استخراج كمية اذا ضربت في المقسوم  
عليه حصل المقسوم. والكمية الحاصلة من ضرب المقسوم في المقسوم عليه بعد قلبه مستكملة  
الشروط المذكورة. فالقاعدة اذا صحيحة

$$\begin{aligned} & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } \frac{1}{2} \text{ الجواب } \frac{4}{3} \\ & \text{الامتحان } \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \\ & \text{اقسم } \frac{3}{4} \text{ على } \frac{2}{5} \text{ الجواب } \frac{15}{8} \\ & \text{الامتحان } \frac{3}{4} = \frac{15}{8} \times \frac{2}{5} \\ & \text{اقسم } \frac{4}{5} \text{ على } \frac{3}{4} \text{ الجواب } \frac{16}{15} \\ & \text{الامتحان } \frac{4}{5} = \frac{16}{15} \times \frac{3}{4} \\ & \text{اقسم } \frac{6}{7} \text{ على } \frac{1}{2} \text{ الجواب } \frac{12}{7} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{4} \text{ الجواب } \frac{4}{2} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{5} \text{ الجواب } \frac{5}{2} \end{aligned}$$

الجواب ن

٥٩ يقسم الكسر على صحيح بضرب المخرج في ذلك الصحيح . مثاله  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$  لان  $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$  وحسباً تقدم  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2}$

٦٠ قد تقدم (١٢) ان مكفوء كمية هو الخارج من قسمة واحد على تلك  
الكمية . فكفوء  $\frac{1}{2}$  هو  $1 \div \frac{1}{2} = 2$  فيكون مكفوء كسر هو الكسر نفسه مقلوباً .  
فكفوء  $\frac{1}{3}$  هو  $\frac{3}{1}$  ومكفوء  $\frac{1}{4}$  هو  $\frac{4}{1}$  ومكفوء  $\frac{1}{5}$  هو  $\frac{5}{1}$  او  $\frac{1}{2}$  ومكفوء  $\frac{1}{3}$  هو  $\frac{3}{2}$

٦١ قد يقع احياناً كسر في صورة كسر آخر . مثاله  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$  وهذا الكسر يُقل من  
الصورة الى المخرج او بعكس ذلك بقلبه . ولا تتغير القيمة بذلك لان القسمة على كسر في  
كالضرب في ذلك الكسر مقلوباً . وضرب الصورة كقسمة المخرج وقسمة الصورة كضرب  
المخرج . ففي  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$  بضرب  $2$  في  $\frac{1}{3}$  ولا تتغير القيمة ان قسمنا المخرج على  $\frac{1}{2}$  اي  
ضربناه في  $2$  فاذا  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$  وهكذا  $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{3}$  و  $\frac{1}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{4}$   
و  $\frac{1}{5} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \times \frac{6}{1} = \frac{6}{5}$  وقس على ذلك

ثم ان هذا الكسر الواقع في الصورة يمكن ازالة لان ضرب الصورة هو كضرب القيمة .



كـ  $7+7=7+9$  ولكن  $7-7=0$  فيبقى كـ  $7+9=7$  فوجدنا قيمة المجهولة  
ك وفي  $7+9$  اي ١٦

نفرض ايضاً ك + ب = ت

اطرح ب من الجانبين فتصير ك + ب - ب = ت - ب ولكن ب  
- ب = ٠ فاذاً ك = ت - ب

فدري ان العمل قد تم بنقل المعلومة من الجانب الواحد الى الآخر مع تبديل  
علامتها وهذا العمل يقال له المتقابلة ولنا ما سبق هذه القاعدة

منى ارتبطت الكمية المجهولة مع كميات معلومة بعلامة الجمع او الطرح  
فانقل المعلومات الى الجانب المتقابل وابدل علاماتها

منفروض ك + ب - م = ح - د

بالمقابلة ك = ح - د - ب + م

٦٤ منى وقعت كميات متشابهة على جانب واحد يجب جمعها حسب قواعد الجمع

فلو فرض ك + ب - م = ح - د

بالمقابلة ك = ح - د - ب + م

وبالجمع ك = ح - د - ب + م

اذا كانت المجهولة على الجانبين يجب نقلها الى جانب واحد

فلو فرض ك + ب - م = ح - د

بالمقابلة ك + ب - م = ح - د

وبالجمع ك = ح - د

٦٥ اذا وقعت كميات متساوية بعلامات متشابهة على الجانبين يمكن اخراجها

منها في الحال

فلو فرض ك + ب - م = ح - د

اخرج ك + ب من الجانبين

ك + ب = د - م

وبالمقابلة والجمع ك = د - م

ولا فرق في ترتيب الكميات ولا في الجانب الذي نُقَلَّ اليه . وإذا بُدِلَت جميع علامات الجانبين لا يتغير المعادلة . مثالة  $ك - ب = د - ت$  بالمقابلة لنا  $- د + ت = - ك + ب$  او  $- ك + ب = - د + ت$  وإذا نُقِلَ جميع الكميات الى الجانب الواحد يبقى الآخر صفرًا . فلو قُرِضَ  $ك + ب = د$  فحُتِذِرَ  $ك + ب - د = ٠$

وعلى ما تقدم نُحوِّل هذه المعادلات

$$ت + ٢ - ك - ٨ = ب - ٤ + ك + ت$$

$$ي - ت - ب - ح = ت + ٢ - ي - ت - ب + ح$$

$$ح + ٢٠ + ٧ = ك - ٨ - ٦ - ح + ٦ - ك - د + ب$$

$$ب + ح + ٢١ - ٤ = د + ١٢ - ٢ - ك - ٧ - ب + ح + د$$

٦٦ اما الضرب فبستعمل متى انقسمت الكمية المجهولة على معلومة كما في  $ت = ب$  بضرب الجانبين في  $ت$  فتصير  $ك = ت$  ب

ولنا من ذلك هذه القاعدة

متى انقسمت المجهولة على معلومة فاضرب الجانبين في تلك المعلومة

ثم قابل واجمع كما تقدم

$$س - ك + ت = ب + د$$

$$اضرب الجانبين في س$$

$$ك = ب + د$$

وبالمقابلة

وهذا العمل يقال له المجهري اعادة الكسر صحيحًا

$$مفروض$$

$$بالجبر$$

$$بالمقابلة$$

$$مفروض$$

$$بالجبر$$

$$بالمقابلة$$

وهكذا متى وقعت المجهولة في مخرج كسر يضرب الجانبان في ذلك المخرج



$$\text{مفروض} \quad ٨ = ٧ + \frac{٦}{١ - ك}$$

$$\text{اضرب في } (١ - ك) \quad ٨ - ٨٠ = ك٧ - ٧٠ + ٦$$

$$\text{بالمقابلة والجمع} \quad ٤ = ك$$

$$٦٧ \text{ لو فرض } ك = \frac{٦}{١ - ك} + ح$$

$$\text{فالضرب في } ك \text{ نصير } ك = \frac{٦}{١ - ك} + ح$$

$$\text{وبالضرب في } ب \text{ نصير } ب ك = د + \frac{٦}{١ - ك}$$

$$\text{وبالضرب في } س \text{ نصير } ب س ك = ت د س + ت ب ح$$

$$\text{او بالضرب في جميع الخارج دفعة واحدة نصير } \frac{ت ب س ك}{س} = \frac{ت ب س ك}{س} + \frac{ت ب ح س}{س}$$

ثم باخراج الاحرف المتشابهة من الصور والخارج لنا كما في الاول  $ب س ك = ت س د + ت ب ح$  ولنا من ذلك هذه القاعدة لازالة الكسور من معادلة اي لجبرها

اضرب كل صورة في جميع الخارج الا مخرجها

$$\text{مفروض} \quad ك = \frac{٦}{١ - ك} + ح - ع - م$$

$$\text{بالجبر} \quad د ع م ك = ت ب ع م + ت د م - ت د ع ح$$

$$\text{مفروض} \quad \frac{٦}{١} + \frac{٤}{٥} + \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{١}$$

$$\text{بالجبر} \quad ١٨٠ + ٤٨ + ٤٠ = ك٢٠$$

٦٨ اذا كانت علامة كسرية وجب تبديلها بدون تغيير القيمة كما تقدم في

فصل الكسور (٤٧)

$$\text{مفروض} \quad \frac{٦ - ٢ ح - ٢ ب}{١} = \frac{د - ت}{ك}$$

$$\text{بتبديل العلامات} \quad \frac{٦ + ٢ ح + ٢ ب}{١} = \frac{ت - د}{ك} + س$$

$$\text{ثم بالجبر} \quad ت - د - ر = ر س ك - ٢ ب ك + ٢ ح ك + ٦ ك$$

٦٩ اما القسمة فتخل بها المعادلات متى ضربت المجهولة في المعلومة وذلك بقسمة

جانب المعادلة على تلك المعلومة . فلو فرض  $ت ك + ب - ح = د$

$$\text{فبالمقابلة نصير } ك = د - ب + ح \text{ وبالقسمة على } ت \quad ك = \frac{د - ب + ح}{ت}$$

$$\text{مفروض} \quad ٢ ك = \frac{٦}{١} - \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٤} + ب$$

بالجبر  $٢س ح ك = ت ح - س د + ٤ ب ح س$   
 بالقسمة على  $٢س ح ك = ت ح - س د + ٤ ب ح س$   
 $\frac{ت ح - س د + ٤ ب ح س}{٢س ح}$

مفروض  $٢ ك - ب ك = ت - د$

حسب (٢٨)  $(٢ - ب) \times ك = ت - د$

بالقسمة على  $٢ - ب ك = \frac{ت - د}{٢ - ب}$

مفروض  $ت ك + ك = ح - ٤$

بالقسمة على  $١ + ت ك = \frac{ح - ٤}{١ + ت}$

مفروض  $ك - \frac{ب - ك}{ح} = \frac{٤ + ت}{٤}$

بالجبر  $٤ ح ك - ٤ ك + ٤ ب = ت ح + ح د$

بالمقابلة والقسمة  $ك = \frac{ت ح + ح د - ٤ ك + ٤ ب}{٤ - ح ٤}$

٧٠ إذا ضرب كل جزء من المعادلة في كثير يجب قسمة المعادلة عليها . وإذا انقسم كل جزء على كثير يجب ضرب المعادلة فيها . وهكذا نعيد رابط ما كانت وتسهل معاملتها حسب تقدم

مفروض  $ت ك + ٢ ت ب = ٦ ت د + ت$

بالقسمة على  $ت ك + ٢ ت ب = ٦ ت د + ت$

بالمقابلة  $ك = \frac{٦ ت د + ت - ٢ ت ب}{٦ ت د + ت}$

مفروض  $\frac{٦ ت د + ت - ٢ ت ب}{ك} = \frac{٦ ت د + ت - ٢ ت ب}{ك}$

بالضرب في  $ك$  حسب (٤٨)  $٦ ت د + ت - ٢ ت ب = ح - د$

بالمقابلة  $ك = ح - د + ب - ١$

مفروض  $ك (ت + ب) - ت - ب = د \times (ت + ب)$

بالقسمة على  $ت + ب ك = ١ - د$

وبالمقابلة  $ك = ١ + د$

٧١ إذا اختفى كتابة مثله على هيئة النسبة فتحوّل تلك النسبة الى معادلة بأن تجعل حاصل الطرفين مساوياً لحاصل الوسطين كما عرفت في علم الحساب . فان قُرِضَ ت : ب :: س : د فإذا ت د = ب س وإن قُرِضَ ٢ : ٤ :: ٦ : ٨

فحينئذ  $٦ \times ٤ = ٨ \times ٣$  وهكذا ت ك ب :: ح د ثم ت د ك = ب ح س  
وايضاً ت + ب :: س ح - م ي ثم ت ي + ب ي = ح س - س م

٧٢ نفخول معادلة الى نسبة بنك الجانب الواحد الى ضلعين فيجعلان طرفين.  
والجانب الآخر الى ضلعين فيجعلان وسطين. فلو فرض ت ب س = د ي ح فينك  
الجانب الاول الى ت X ب س او ت ب X س او ت س X ب وهكذا  
بنك الجانب الآخر الى د X ي ح او د ي X ح او د ح X ي  
ولنا من ذلك عدة نسب اي ت : د :: ي : ح :: ب : س وايضاً ت ب : د ي  
:: ح : س او ت س : د ح :: ي : ب وفلم جراً لان هذه النسب كلها اذا نفخولت  
الى معادلات تعبر ت ب س = د ي ح  
فلو فرض ايضاً ت ك + ب ك = س د - س ح لانك الجانب الاول الى  
ك X (ت + ب) والثاني الى س X (د - ح) ولنا ك : س :: د - ح : ت + ب  
او د - ح : ك :: ت + ب : س وفلم جراً

### امثلة

(١) مفروض  $٧ + \frac{٥}{٨} = ٦ + \frac{٢}{٤}$

بالجبر  $٢٢٤ + ك = ١٩٢ + ٢٠$

بالمقابلة والجمع  $٢٢ = ك$

بالقسمة على ٤  $٨ = ك$

(٢) مفروض  $\frac{ك}{٨} + ح = ب - \frac{ك}{٨} + د$

بالجبر ب س ك + ب ت ح س = ت س ك - ت ب ك + ت ب س د

بالمقابلة والقسمة  $ك = \frac{ت ب س د - ت س ك - ت ب ك}{ب س - ت س + ت ب}$

(٣) مفروض  $١٢ - ٤٠ - ٦ - ك = ١٦ - ١٢٠ - ١٤ - ك$

(٤)  $\frac{١٩ - ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٢} + \frac{٢ - ك}{٢}$  "  $ك = \frac{١٩}{٤}$

(٥)  $\frac{ك}{٤} - ٢٠ = \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٢}$  "  $ك =$

(٦)  $٥ = ٤ - \frac{١ - ت}{٤}$  "  $ي =$

(٧)  $٨ = ٢ - \frac{٢}{٤ + ج}$  "  $ك =$

(٨)  $١ = \frac{٦ + ج}{٤ + ج}$  "  $ج =$

$$\begin{aligned}
 (١) \text{ مفروض } ك + \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٢} &= ١١ \quad - ك \\
 (٢) \quad \frac{٧}{١٠} &= \frac{ك}{٤} - \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٢} \quad - ك \\
 (٣) \quad \frac{٧ - ٢٨٤}{٥} &= \frac{٦ + ٥ - ٤}{٤} \quad - ك \\
 (٤) \quad \frac{٢٧ - ١١}{٢} + ٥ &= \frac{٦ + ٢ - ٤}{٥} \quad - ك \\
 (٥) \quad \frac{٢ - ٤ - ١٨}{٢} &= \frac{٢ - ٤ - ١٨}{٢} \quad - ك \\
 (٦) \quad \frac{٢٧ - ١٧}{٢} + \frac{٥ - ٥}{٨} &= \frac{١١ - ١٦}{١٦} + ٢١ \quad - ك \\
 (٧) \quad \frac{١}{١٢} - \frac{١٤}{٢} &= \frac{٤ - ٤}{٤} - \frac{ك}{٤} \quad - ك \\
 (٨) \quad \frac{٩ + ٢}{٢} &= \frac{٦ + ٤ + ١٦}{٥} + \frac{٥ + ٧}{٢} \quad - ك \\
 (٩) \quad \frac{١٤ + ٧}{٢} + \frac{٦ - ٥}{٢} &= \frac{٢ + ٤}{٢} - \frac{٥ - ١٧}{٥} \quad - ك \\
 (١٠) \quad \frac{٤ - ٢٤}{٥} + \frac{٨ - ٢٦}{٧} - \frac{٢ - ٢٠}{٢} &= \frac{٤ + ٢ - ٢٢}{٢} - ٢ \quad - ك \\
 (١١) \quad \frac{٤ + ٢}{٢} &= \frac{١٢ - ٧}{٢} + \frac{٧ + ٦}{٩} \quad - ك \\
 (١٢) \quad ٤ : ٧ :: \frac{ك}{٤} : \frac{١٨}{٢} & \quad - ك
 \end{aligned}$$

### عمليات

(١) سئل رجل عن ثمن ساعته فقال ان ضرب ثمنها في اربعة واضيف الى المحاصل سبعون وطرح من المجموع خمسون يكون الباقي ٢٢٠ ديناراً. فكم ثمن الساعة افرض ثمن الساعة ك  
 واذا ضرب هذا الثمن في ٤ يصير ٤ ك  
 ثم اضف الى هذا المحاصل ٧٠ فيصير ٤ ك + ٧٠  
 اطرح من المجموع ٥٠ فيصير ٤ ك + ٧٠ - ٥٠  
 وهذا الباقي يعادل ٢٢٠ ديناراً اي ٤ ك + ٧٠ - ٥٠ = ٢٢٠  
 وبتحويل هذه المعادلة لنا ك = ٥٠

فقد وجدنا ثمن الساعة خمسين ديناراً. ولا تمحان العمل توضع قيمة المجهول عوضاً عن المجهول في المعادلة الاصلية فان كان الجانبان متساويين كان العمل صحيحاً والا فلا.  
 مثالة في المسئلة السابقة بالتعويض عن ك بخمسين نصير ٤ × ٥٠ - ٧٠ + ٥٠ = ٢٢٠ وهو صحيح

(٢) اي عدد اذا اضيف اليه نصفه ثم طرح ٢٠ من المجموع يكون الباقي

ربع العدد

افرض العدد ك

ثم حسب شروط المسئلة  $ك + \frac{ك}{٣} - ٢٠ = \frac{ك}{٤}$

وبتحويل هذه المعادلة نصير  $ك = ١٦$

والامتحان  $١٦ + \frac{١٦}{٣} - ٢٠ = \frac{١٦}{٤}$

(٢) رجل قسم مبلغا بين اولاده الثلاثة فاعطى الاول نصف المبلغ الالف دينار. والثاني ثلث المبلغ الـ ٨٠٠ دينار. والثالث ربع المبلغ الـ ٦٠٠ دينار. فكم كان المبلغ

اذا فرضنا ان المبلغ ك تكون الحصص  $\frac{ك}{٣} - ١٠٠٠$  و  $\frac{ك}{٣} - ٨٠٠$  و  $\frac{ك}{٤}$  - ٦٠٠ ومجموع هذه الثلاث يعادل المبلغ اي  $\frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} - ٢٤٠٠ = ك$  وبالتحويل  $ك = ٢٨٠٠$

(٣) اقسم ٤٨ الى قسمين حتى ينقسم اكبرها على ٦ واصغرهما على ٤ ويكون مجموع

الخارجين ٩

ان فرض الاصغر ك يكون الاكبر  $٤٨ - ك$

وحسب شروط المسئلة  $\frac{ك}{٤} + \frac{٤٨ - ك}{٦} = ٩$

وبالتحويل  $ك = ١٢$  اصغرهما و  $٤٨ - ١٢ = ٣٦$  اكبرها

(٥) اي عدد اذا اضيف اليه نصفه يكون المجموع اكثر من ٦٠ بفضلة العدد و ٦٥

افرض العدد ك فلنا  $ك + \frac{ك}{٢} - ٦٠ = ٦٥$   $ك = ٥٠$

(٦) اقسم ٢٢ الى قسمين حتى ينقسم اصغرهما على ٦ واكبرها على ٥ ويكون مجموع

الخارجين ٦

لفرض اصغرهما ك فيكون اكبرها  $٢٢ - ك$

وبشروط المسئلة  $\frac{ك}{٥} + \frac{٢٢ - ك}{٦} = ٦$

$ك = ١٢$  اصغرهما  $٢٢ - ١٢ = ١٠$  اكبرها

(٧) اقسم ٢٥ الى قسمين بحيث يكون اكبرها ٤٩ مرة اصغرهما

لفرض الاصغر ك والاكبر  $٢٥ - ك$  فلنا  $٢٥ - ك = ٤٩ ك$

$ك = \frac{٢٥}{٥٠}$  اصغرهما و  $\frac{٢٥}{٥٠} = ٢٤$  اكبرها

(٨) اقسم ٤٨ الى ٩ اقسام حتى يكون كل قسم اكبر من الذي قبله بنصف

ليكون القسم الاصغر ك

فيكون الثاني ك +  $\frac{1}{2}$

والثالث ك + ١

والرابع ك +  $1\frac{1}{2}$

وملم جراً ك + ٢

ك +  $2\frac{1}{2}$

ك + ٣

ك +  $3\frac{1}{2}$

ك + ٤

ك =  $2\frac{1}{2}$

مجموع هذه الاقسام ٩ ك + ١٨ = ٤٨

٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

والاقسام  $48 = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

تنبيه . تحل هذه المسئلة ايضاً بقواعد السلسلة الحسابية على اسهل طريق كما سنعلم

(١) اي عدد يُطرح واحد من مضاعفو ثم يضاعف الباقي ويُطرح منه ٢ ويُقسم

هذا الباقي على ٤ فيكون الخارج اقل من العدد بواحد

لنفرض العدد ك فيكون مضاعفه ٢ ك وان طُرح منه واحد يكون ٢ ك - ١

ومضاعفه ٤ ك - ٢ ثم يُطرح ٢ فيكون ٤ ك - ٢ - ٢ اي ٤ ك - ٤ وبالقسمة

على ٤ يصير ك - ١ وهذا يعادل العدد الاً واحداً اي ك - ١ = ك - ١

فلنا ما يُسمى معادلة ذاتية . وهذه المعادلة تدل على ان المجهول غير معين فيمكن

ان يفرض اي عدد شئت

(١٠) رجل اشترى اذرعاً من القاش . وكان ثمن كل ٥ اذرع ٧ غروش : ثم

باع ما اشتراه بثمن ١١ غرشاً لكل ٧ اذرع ورج ١٠٠ غرش فكم ذراعاً اشترى

لنفرض الاذرع ك وه ١/٥ الغرش ثمن الذراع و  $\frac{7}{10}$  ثمن الاذرع كلها ثم عند

البيع كان ثمن الذراع  $\frac{11}{7}$  من الغرش و ثمن الجميع  $\frac{11}{7}$  وفضله الشراء والبيع ١٠٠ اي

$\frac{11}{7} - \frac{7}{10} = 100$  ك = ٢٥٠٠ ك =  $842\frac{1}{2}$

(١١) اي عدد انا اُضرب اليه ٧٢ وقسم المجموع على ١٢٥ يعادل الخارج ٧٢٩٢

الجواب ١٢٨٠

مقسوماً على ٤٦٣

(١٢) تاجر تاجر في صنف من البضائع فرج او خسر . وفي صنف آخر ربح ٢٥٠ ديناراً . وفي صنف آخر خسر ٦٠ ديناراً . ورجع من الاصناف الثلاثة ٢٠٠ دينار فكم ربح او خسر في الاول

لنفرض المجهول ك فان حسبنا الربح + تكون الخسارة - فلنا  $ك + ٢٥٠ - ٦٠ = ٢٠٠$  وبالمقابلة  $ك = ١٠$

فكون الجواب سلبياً يدل على انه خسر في الاول  
(١٣) سفينة سافرت الى الشمال ٤° ثم الى الجنوب ١٢° ثم الى الشمال ايضا ١٧° ثم الى الجنوب ايضا ١٩° وكان لما حيتتد ١١° من العرض الجنوبي فكم كان عرضها في الاول

لنفرض  $ك =$  العرض المطلوب . فان حسبنا الشمال + يكون الجنوب - ولنا  $ك + ٤ - ١٢ + ١٧ - ١٩ = ١١$  . اي كانت على خط الاستواء

(١٤) اي عدد اذا انقسم على ١٢ يكون مجموع الخارج والمقسم والمقسم عليه ٦٤  
لنفرض  $ك =$  العدد . فلنا  $ك + ١٢ + \frac{ك}{١٢} = ٦٤$   
وبالجبر والمقابلة والقسمة  $ك = \frac{٦٢٤}{١٣} = ٤٨$

(١٥) رجل اشترى ١٢ ثوب قاش منها اثنان ابيضان وثلاثة سود وسبعة زرق بثمن ١٤٠ ديناراً . وثمن الثوب الاسود اكثر من ثمن الابيض دينارين وثن الازرق اكثر من ثمن الاسود ثلاثة دنائير فكم ثمن كل واحد منها

لنفرض  $ك =$  ثمن الابيض فيكون ثمن اللوين ٢ ك وثن الاسود  $ك + ٢$  فيكون ثمن الثلاثة ٢ ك + ٦ وثن الثوب الازرق  $ك + ٥$  فيكون ثمن السبعة ٧ ك + ٣٥ والمجموع ١٢ ك + ٤١ فلنا  $١٢ ك + ٤١ = ١٤٠$   $ك = ٨ \frac{١}{٤} =$  ثمن الابيض و  $\frac{١}{٤} =$  ثمن الاسود و  $\frac{١٣}{٤} =$  ثمن الازرق

(١٦) مبلغ انقسم بين اربعة وراث فكان للاول ٢٠٠ دينار زيادة عن  $\frac{١}{٤}$  المبلغ . والثاني ٣٤٠ زيادة عن  $\frac{١}{٤}$  المبلغ . والثالث ٣٠٠ دينار زيادة عن  $\frac{١}{٤}$  المبلغ . والرابع ٤٠٠ دينار زيادة عن  $\frac{١}{٨}$  المبلغ فكم كان ذلك المبلغ الذي انقسم

الجواب ٤٨٠٠ ديناراً  
(١٧) مطلوب عدد اقل من ٥٠٠ دينار زيادة مجموع على ٤٠

الجواب ٤٥٠

(١٨) ما عددان فضلتهما ٤٠ ونسبة احدهما الى الآخر كسبة ٦ الى ٥

الجواب ٢٤٠ و ٢٠٠

(١٩) مزيج من الخناس والتصدير والرصاص كان فيه النصف الا ١٦ رطلاً نخاساً. والثالث الا ١٢ رطلاً قصديراً. وكان الرصاص اكثر من الربع باربعة ارطال. فكم رطلاً من كل صنف في ذلك المزيج

الجواب كان الخناس = ١٢٨ رطلاً. والتصدير = ٨٤ رطلاً. والرصاص = ٧٦ رطلاً

(٢٠) مركبان بينهما ١٨ ميلاً. والمتأخر منها جرى ١٠ اميال في الساعة والمتقدم

٨ اميال فكم ميلاً يجري المتقدم قبل ان يلحقه المتأخر

الجواب ٧٢ ميلاً

(٢١) ما عددان مجموعهما سدس حاصلهما ونسبة احدهما الى الآخر كسبة ٢ الى ٣

الجواب ١٥ و ١٠

(٢٢) كلب وارنب بينهما ٥٠ قفزة. وكلما قفز الكلب ٢ قفزات قفز الارنب ٤

غير ان القفزين من الكلب تساويان ٢ قفزات من الارنب. فكم قفزة يقفز الكلب

قبل ان يدرك الارنب

الجواب ٢٠٠

(٢٣) ثلاثة شعراء مدحوا ملكاً. فجعل الملك جائزة الاول ٢٠٠ دينار. وجائزة

الثاني كالاول وثالث الثالث. وجائزة الثالث كجميع الجائزين الاولين. فكم مجموع

الجوائز الثلاث

الجواب ١٢٠٠ دينار

(٢٤) اي عدد نسبة الى ١٢ مع ثلاث مرات العدد كسبة ٢٠٢ الى ٨

الجواب ٨

(٢٥) زورق تقدم عن مركب ١٢ ميلاً وجرى ٢ اميال كلما جرى المركب

٥ اميال. فكم ميلاً يجري المركب قبل ان يدرك الزورق

الجواب ٢٢ ١/٢ ميل

(٢٦) اي عدد فضله سدس وثمنه ٢٠

الجواب ٤٨٠

(٢٧) اقسام ٢٠٠٠ الى قسمين بحيث تكون نسبة احدهما الى الآخر ٧:٩

الجواب ١١٢٥ و ٨٧٥

(٢٨) اي عدد مجموع تلكه وربعه وخمسه ٦٤

الجواب ١٢٠

(٢٩) بين زيد وعمر مسافة ٢٦٠ ميلاً فصارا حتى التقيا. اما زيد فصار كل

ساعة ١٠ اميال واما عمرو فثانية اميال في الساعة. فكم قطع كل واحد من المسافة

قبل ان التقيا

الجواب زيد = ٢٠٠ ميل وعمر ١٦٠ ميلاً

(٣٠) رجل عاش ثلث عمره في القسطنطينية وربعه في دمشق والباقي وهو ٢٠



- حنة في مصر فكم سنة عاش  
الجواب ٤٨ سنة
- (٢١) اتي حديد فضلة رهو وخمسة ٦٦  
الجواب ١٩٢٠
- (٢٢) عمود في بركة خمسة في الارض و  $\frac{1}{7}$  منه في الماء و  $\frac{1}{2}$  قدما فوق الماء فكم  
قدما طول العمود  
الجواب ٢٥ قدما
- (٢٣) اتي حديد اذا اضيف اليه ١٠ يكون  $\frac{1}{10}$  المجموع ٦٦  
الجواب ١٠٠
- (٢٤) بستان كان فيه  $\frac{1}{4}$  الانجار تفاحا و  $\frac{1}{10}$  كثرى والبقية وفي ٢٠ شجرة اكثر  
من ثمن الجميع من رجلا فكم شجرة في البستان  
الجواب ٨٠٠
- (٢٥) رجل اشترى ارطالا من الخربين ٩٤ غرشا وشرب منها سبعة ارطال ثم  
باع ربع الباقي بعشرين غرشا على سعر اشتراه فكم رطلا اشترى  
الجواب ٤٧ رطلا
- (٢٦) لزيد وعبيد ايراد واحد سنويا. اما زيد فانفق كل سنة فوق ايراده مبلغا  
يساوي  $\frac{1}{4}$  الايراد. واما عبيد فانفق كل سنة  $\frac{1}{5}$  ايراده. وبعد ١٠ سنين حصل عنده  
مبلغ يساوي المال الذي انكسر على زيد مع زيادة ١٦٠ دينارا. فكم كان الايراد  
الجواب ٢٨٠ ديناراً
- (٢٧) رجل عاش ربع عمره بطلا. ثم تزوج وبعد ذلك مدة ٥ سنين اكثر من  
 $\frac{1}{4}$  عمره وولد له ابن. ثم مات الابن قبل ايوه بمدة ٤ سنين وهو قد بلغ نصف عمر ايوه.  
فكم سنة عاش الرجل  
الجواب ٨٤ سنة
- (٢٨) اتي حديد مجموع  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  منه ٧٣  
الجواب ٨٤
- (٢٩) رجل انفق ١٠٠ دينار اكثر من  $\frac{1}{4}$  ايراده فبقي ٢٥ ديناراً اكثر من  
نصفه فكم كان الايراد  
الجواب ٤٥٠
- (٣٠) مغلر من البارود كان فيه الملح ١٠ ارطال اكثر من  $\frac{1}{4}$  الجميع والكبريت  
 $\frac{1}{2}$  رطل اقل من  $\frac{1}{4}$  الجميع. والقيم اقل من  $\frac{1}{4}$  الملح برطلين. فكم رطلا كان البارود  
الجواب ٦٩ رطلا
- (٣١) وعاء يسع ١٤٦ رطلا امتلا بمزيج من سمن وحليب وماء. وكان السمل  
اكثر من السمن بخمسة عشر رطلا والماء بقدرها جميعا. فكم رطلا كان فيه من كل صنف  
الجواب كان السمن ٢٩ رطلا والسمل ٤٤ والماء ٧٣
- (٣٢) اربعة اشخاص اشتركوا في شراء بستان ثمنه ٤٧٥٥ ديناراً. فدفع زيد من  
الثمن ثلاثة اضعاف ما دفعه عمرو. ودفع عبيد بقدر ما دفعوا كلاهما. ودفع عبد الله  
بقدر ما دفع زيد وعبيد معا. فكم دفع كل واحد منهم

الجواب دفع زيد = ٢٥١ وعمره = ٢١٧ وعبيد = ١٢٦٨ وعبد الله

= ٢٢١٩

(٤٢) اقسام ٢٩ الى خمسة اقسام ويكون الاول أكثر من الثاني بثلاثة وأقل من الثالث بمشرة وأكثر من الرابع بتسعة وأقل من الخامس بستة عشر

لتفرض ك = الأول ك - ٢ = الثاني ك + ١٠ = الثالث ك - ٩ =

الرابع ك + ١٦ = الخامس ٥ ك + ١٤ = ٢٩ ٥ ك - ٨٥ = ك ١٧ =

(٤٣) رجل قسم ماله بين اولاده الأربعة فاعطى الثالث ٥ غروش زيادة عن الرابع. والثاني ١٢ غرشاً زيادة عن الثالث. والأول ١٨ غرشاً أكثر من الثاني وكان المجموع ٦ غروش أكثر من سبعة أمثال حصة الرابع فكم كان المال

الجواب ١٥٣ غرشاً

(٤٤) كان لرجل قطيعان من الغنم متساويين في عدد الرؤوس فباع من القطيع الواحد ٢٩ رأساً ومن الآخر ٢٢ رأساً فكان الواحد مضاعف الآخر في العدد.

فكم رأساً في كل قطيع

الجواب ١٤٧

(٤٥) ساع سعى خمسة أيام وقطع كل يوم ٦٠ ميلاً. ثم تبعه آخر وقطع كل يوم ٧٥ ميلاً ففي كم يوم يدرك الأول

الجواب في ٢٠ يوماً

(٤٦) كان عمر زيد مضاعف عمر عبيد. وعمر عبيد بقدر عمر عبد الله ثلاث مرات. ومجموع اعمار الثلاثة ١٤٠ سنة فكم عمر كل واحد منهم

الجواب عمر زيد ٨٤ وعبيد ٤٢ وعبد الله ١٤

(٤٧) ثوبان قيمة الذراع من كليهما واحدة ولكن الواحد أطول من الآخر فبلغ

من الواحد ٥ دنانير والآخر ٦ ١/٢ دينار. فان أضيف الى كل واحد منها ١٠ اذرع

كانت نسبة الواحد الى الآخر ٦:٥ مطلوب طول كل ثوب

الجواب ٢٠ و ٣٦ ذراعاً

(٤٨) تاجران راس مال الواحد منها كراس مال الآخر. وفي السنة الأولى ربح

احدهما زيد ٤٠ ديناراً وخسر احدهما عبيد ٤٠ ديناراً. وفي السنة الثانية خسر زيد

١/٢ ما كان له في نهاية السنة الأولى وربح عبيد ٤٠ ديناراً أقل من مضاعف ما خسره

زيد. وكان لعبيد حينئذ مضاعف ما كان لزيد فكم كان راس المال

الجواب ٢٢٠ ديناراً

(٤٩) اي عدد اذا أضيف الى ٣٦ ثم الى ٥٢ تكون نسبة المجموع الأول الى الثاني

المجواب ١٢

٤:٣::

(٥١) رجل اشترى جملاً وفرساً وحماراً بثلاث مئة وستين ديناراً . وكان ثمن الفرس مضاعف ثمن الحمار وثمان الجمل مضاعف ثمن الفرس والحمار كليهما . فاذا كان ثمن كل واحد من الثلاثة

المجواب ثمن الجمل = ٢٤٠ والفرس = ٨٠ والحمار = ٤٠ ديناراً

(٥٢) انا لا ابتلاً آخراً ثم رشح منه ثلث ما فيه ثم اخذ منه ٢١ رطلاً وبقي نصف

ملء الاناء فكم رطلاً كان فيه اولاً

(٥٣) رجل كان له ستة بدين كل واحد منهم اكبر من الذي يليه باربعة سنين وعمر الاكبر ثلاثة اضعاف عمر الاصغر . فما هو عمر كل واحد منهم

المجواب ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ ٢٦ ٣٠

(٥٤) اقسام ٤٩ الى قسمين وتكون نسبة الاكبر مع ستة الى الاصغر الا ١١ كسبة

المجواب ٣٠ = الاكبر ١٩ = الاصغر

(٥٥) ما عددان نسبة اصغرهما الى الاكبر :: ٣ : ٢ وان اضيف اليهما ٤ تكون

النسبة :: ٥ : ٧

(٥٦) رجل اشترى زقنين من الخمر مملوءين احدهما يسع ملء الاخر ثلاث مرات

فاخذ من كل واحد اربعة ارطال وبقي في الواحد قدر ما بقي في الاخر اربعة امثال فكم رطلاً كان فيها

(٥٧) اقسام ٦٨ الى قسمين وتكون فضلة اكبرها و ٨٤ بقدر ثلاث مرات فضلة

اصغرهما و ٤٠

(٥٨) اربعة اماكن على ترتيب ب ت ث ج وبين ب وج ٢٤ ميلاً ونسبة بعد

ب عن ت الى بعد ت عن ج :: ٢ : ٣ واذا اضيف ربع بعد ب عن ت الى نصف بعد ت عن ج يكون المجموع ثلاث مرات بعد ت عن ت مطلوب بعد كل واحد عن الآخر

المجواب من ب الى ت = ١٢ من ت الى ث = ٤ من ث الى ج = ١٨

(٥٩) اقسام ٢٦ الى ٢ اقسام بحيث يكون نصف الاول و ١/٢ الثاني و ١/٤

الثالث متساوية

(٦٠) تاجر عاش ثلاث سنين على ٥٠ ديناراً كل سنة . وفي نهاية كل سنة

اضاف الى ما بقي من ماله مبلغاً يساوي ثلث تلك البقية . وعند نهاية المدة المذكورة كان

راس ماله قد تضاعف فكم كان راس المال الجواب ٧٤٠ ديناراً  
 (٦١) قائد جيش بعد وقعة أنكرس فيها وجد نصف جيشه و ٢٦٠٠ نفر يصلحون  
 لوقعة أخرى و  $\frac{1}{2}$  الجيش و ٦٠٠ نفر مجارح . والبقية أي  $\frac{1}{2}$  الجميع قتلى فكم كان  
 عدد الجيش أولاً الجواب ٢٤٠٠٠  
 (٦٢) رجلٌ استأجر فاعلاً لمدة ٤٨ يوماً على شرط أن يعطيه كل يوم اشتغل  
 ٢٤ درهماً أما لكل يوم بطالة فيدفع الفاعل ١٢ درهماً ثمن طعامه وعند نهاية المدة المشار  
 إليها أي ٤٨ يوماً حق للفاعل ٥٠٤ دراهم . مطلوب عدة أيام الشغل وعدة أيام البطالة  
 (٦٣) رجلٌ استأجر فاعلاً ن يوماً لكل يوم الشغل اعطاه ب درهماً ولكل  
 يوم البطالة دفع ت درهماً ثمن طعامه وعند نهاية المدة أي ن يوماً حق له ح  
 درهماً . مطلوب أيام الشغل وإيام البطالة  

$$\frac{ن + ح}{ب + ت} = ك$$
 افرض ك = أيام الشغل

## الفصل الثامن

### في القوت والترقية

٧٢ إذا ضربت كمية في نفسها بُني المحاصل قوة . مثالة  $٢ \times ٢ = ٤$  أي مربع  
 اثنين أو مال اثنين أو القوة الثانية من اثنين و  $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$  أي مكعب اثنين أو  
 القوة الثالثة من اثنين و  $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$  أي مال مال اثنين أو القوة الرابعة  
 من اثنين و ت  $\times$  ت = مربع ت أو مال ت أو قوة ت الثانية وقس على ذلك .  
 والكمية الأصلية التي يتكرر ضربها حصلت القوة هي جذر تلك القوة ويقال لها الجذر  
 المالّي والمربع والثاني أو الجذر الكمي والثالث أو الرابع أو الخامس بالنسبة إلى القوة .  
 فائتان مثلاً هو جذر أربعة المالّي أو المربع أو الثاني لأن  $٢ \times ٢ = ٤$  وهو جذر ثمانية  
 الكمي أو الثالث لأن  $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$  وجذر ١٦ الرابع لأن  $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$   
 وقس على ذلك

٧٤ بدل على القوت رقم صغير عن يسار الكمية مرتفع عنها قليلاً . مثالة ت  $٢$   
 وب  $١$  ويقال لهذا الرقم دليل القوة . وإن لم يكن للكمية دليل يُقدر لها واحدٌ  
 دليلاً . فإن ت  $١$  = ت أي قوة ت الأولى . وإذا انحصرت كمية ووضِع لها دليل



(ت+ب)<sup>١</sup> = ت + ب اي القوة الاولى

ت + ب

ت + ت + ب

ت + ب + ب

(ت+ب)<sup>٢</sup> = ت + ت + ب + ب = القوة الثانية

ت + ب

ت + ت + ت + ب + ب + ب

ت + ب + ب + ب + ب + ب

(ت+ب)<sup>٣</sup> = ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب = القوة الثالثة

ت + ب

ت + ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب

ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب

(ت+ب)<sup>٤</sup> = ت + ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب = القوة الرابعة

وهكذا الى آية قوة فُرِضَتْ

مربع ت - ب هوت - ت + ب + ب

مكعب ت + ا هوت + ت + ت + ت + ب + ب + ب

مربع ت + ب + ح هوت + ت + ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ح

ما هو مكعب ت + ب + ب + ب

ما هي القوة الرابعة من ب + ب + ب

ما هي القوة الخامسة من ك + ا + ب

ما هي القوة السادسة من ا - ب

٧٨ مربعات الكميات الثنائية والفضلية كثيرة الوقوع في الاعمال الجبرية

فيجب على المعلم ان يعرف كيفية ترييها معرفة جيدة . فاذا ربعتنا ت + ب وت -

ب لنا

$\begin{array}{r} \text{ت} - \text{ب} \\ \hline \text{ت} - \text{ب} \\ \hline \text{ت}^2 - \text{ت ب} \\ \hline - \text{ت ب} + \text{ب}^2 \\ \hline \text{ت}^2 - 2\text{ت ب} + \text{ب}^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{ت} + \text{ب} \\ \hline \text{ت} + \text{ب} \\ \hline \text{ت}^2 + \text{ت ب} \\ \hline + \text{ت ب} + \text{ب}^2 \\ \hline \text{ت}^2 + 2\text{ت ب} + \text{ب}^2 \end{array}$
--	--

فنهى في كليها الجزء الاول والثالث مربعي ت وب والجزء الثاني مضاعف حاصل ت في ب فلما من ذلك هذه القاعدة لتربيع هذه الكميات بدون الاستعانة بالضرب وفي

مربع كمية ثنائية كلا جزئيهما ايجابيان يعدل مربع الجزء الاول مع مضاعف حاصل الجزئين مع مربع الجزء الثاني  
مربع كمية فضلية يعدل مربع الجزء الاول الا مضاعف حاصل الجزئين مع مربع الجزء الثاني

فربع  $2\text{ت} + \text{ب} = \text{ت}^2 + 4\text{ت} + \text{ب}^2$

ومربع  $\text{ح} + 1 = \text{ح}^2 + 2\text{ح} + 1$

ومربع  $\text{ت ب} + \text{س د} = \text{ت}^2 \text{ب}^2 + 2\text{ت ب س د} + \text{س}^2 \text{د}^2$

ومربع  $6\text{ى} + 2 = 36\text{ى}^2 + 24\text{ى} + 4$

ومربع  $2\text{د} - \text{ح} = 4\text{د}^2 - 4\text{د ح} + \text{ح}^2$

ومربع  $\text{ت} - 1 = \text{ت}^2 - 2\text{ت} + 1$

اما كيفية ترقية هذه الكميات الى القوت العليا فمما ياتي الكلام عليها في محله

٧٩ تكفي احيانا الدلالة على الترقية بدليل القوة المفروضة . فيقال في مربع

$\text{ت} + \text{ب} \quad (\text{ت} + \text{ب})^2$  وفي القوة التوتية من  $\text{ب س} + 8 + \text{ك} \quad (\text{ب س} + 8 + \text{ك})^2$

اوب  $\text{س} + 8 + \text{ك}$  بمصر الكمية بين قوسين او تحت خط كما رايت وان كان الجذر مضلعا بمحصر الضلعان معا او كل ضلع على حدته حسبما يتحسن . فيقال في مربع

$\text{ت} + \text{ب} \times \text{س} + 2$

(ت + ب)  $\times$  (س + د) | أ + ت + ب |  $\times$  س + د | لان حاصل مربعي كميّين  
 يعدل مربع حاصلهما (٧٦) ومتى انبسطت كمية محصورة ترفع عنها القوسان او الخط.  
 فان (ت + ب)  $\times$  اذا انبسطت تصير ت<sup>٢</sup> + ٢ ت ب + ب<sup>٢</sup>  
 ٨٠ اذا كان الجذر ايجابياً تكون القوت ايجابية واذا كان سلبياً تكون  
 القوت الشنعية ايجابية والوترية سلبية كما يتضح مما قبل سابقاً في فصل الضرب (٢٢)  
 مثالة

القوة الثانية من - ت هي	ت +
الثالثة "	ت -
الرابعة "	ت +
الخامسة "	ت - الى آخره

اي كل قوة وترية لها علامة جذرها وكل قوة شنعية هي ايجابية ان  
 كان جذرها سلبياً او ايجابياً

٨١ كل قوة ترفع الى قوة اعلى بضرب دليلها في دليل القوة المفروضة  
 مثالة كعب ت<sup>٣</sup> = ت<sup>٣</sup>  $\times$  ت<sup>١</sup> لان ت<sup>٣</sup> = ت<sup>٣</sup> وتكعب ت هو ت<sup>٣</sup>  $\times$  ت  
 ت<sup>٣</sup>  $\times$  ت<sup>٣</sup> = ت<sup>٦</sup> ت<sup>٣</sup> ت<sup>٣</sup> ت<sup>٣</sup> ت<sup>٣</sup> ت<sup>٣</sup> اي القوة السادسة من ت والقوة  
 الثالثة من ت<sup>٣</sup>

القوة الرابعة من ت <sup>٣</sup> ب <sup>٣</sup> = ت <sup>٣</sup> $\times$ ت <sup>٣</sup> ب <sup>٣</sup> $\times$ ت <sup>٣</sup> ب <sup>٣</sup> = ت <sup>١٢</sup> ب <sup>٩</sup>
الثالثة من ت <sup>٣</sup> ك <sup>٣</sup> = ت <sup>٣</sup> $\times$ ت <sup>٣</sup> ك <sup>٣</sup> = ت <sup>٦</sup> ك <sup>٩</sup>
الرابعة من ت <sup>٣</sup> ك <sup>٣</sup> د <sup>٣</sup> = ت <sup>٣</sup> $\times$ ت <sup>٣</sup> ك <sup>٣</sup> د <sup>٣</sup> = ت <sup>١٢</sup> ك <sup>٩</sup> د <sup>٩</sup>
الخامسة من (ت + ب) = (ت + ب) <sup>٥</sup>
الوترية من ت <sup>٣</sup> = ت <sup>٣</sup> <sup>٥</sup>
الوترية من (ك - ي) = (ك - ي) <sup>٥</sup>
(ت + ب <sup>٣</sup> ) <sup>٣</sup> = ت <sup>٣</sup> + ٣ ت <sup>٢</sup> ب <sup>٣</sup> + ٣ ت ب <sup>٦</sup> + ب <sup>٩</sup>
ت <sup>٣</sup> $\times$ ب <sup>٣</sup>   = ت <sup>٦</sup> + ب <sup>٩</sup>
(ت <sup>٣</sup> ب <sup>٣</sup> ) <sup>٣</sup> = ت <sup>٩</sup> ب <sup>٩</sup> ح <sup>٩</sup>





$$\begin{aligned} \text{مربع ت} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \text{مربع ك} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \text{مربع ب} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

٨٤ قد علمت آنفاً (٦١) ان المسمى الكسري يمكن نقله من صورة كسر الى مخرجه او عكسه . واذا راجعنا ما قبل في القوت المكنوة (٧٥) نرى ان ايمى ضلع كان يمكن نقله من الصورة الى المخرج او عكسه اذا تغيرت علامة دليله . مثاله في  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  يمكن نقل الكاف الى المخرج بدون تغيير قيمة الكسر اذا جعلت علامة دليلها ايجابية . لان  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  وفي  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  ننقل الياء الى الصورة لان  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  وهكذا  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

وهكذا اذا كانت العلامة في الصورة ايجابية وفي المخرج سلبية مثاله  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

فاذا يمكن ان يرفع مخرج كسر بالكلية وان يجعل الصورة واحداً بدون تغيير قيمة العبارة . مثاله  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

نبذة في جمع القوت وطرحها

٨٥ نجمع القوت بكتابتها متوالية مع علاماتها . فمجمع ت وب هو ت + ب ومجمع ت ا ب وح د هو ت + ب + ح + د  
واذا كانت الاحرف والقوت متشابهة نجمع سمياتها او نطرح حسب قواعد الجمع (١٦ و ١٧) مثاله  
مجمع ت ا و ت ا هو ت ا

٣ ت ا	٣ ب	٣ ك ا
٧ ت ا	٦ ب	٣ ك ا
٤ ت ا		٥ ك ا

المجمع



اضرب  $ك^أ + ك^أ ي + ك^أ ي + ك^أ ي - ك^أ ي - ك^أ ي$   
 اضرب  $ك^أ ي + ك^أ ي - ك^أ ي - ك^أ ي - ك^أ ي - ك^أ ي$   
 اضرب  $ك^أ + ك^أ - ك^أ - ك^أ - ك^أ - ك^أ$

ومكنا ان كانت الدلائل سليمة. مثالة

$ت^أ \times ت^أ = ت^أ$  و  $ت^أ \times ت^أ = ت^أ$  و  $ت^أ \times ت^أ = ت^أ$   
 و  $ت^أ \times ت^أ = ت^أ$  و  $ت^أ \times ت^أ = ت^أ$  و  $ت^أ \times ت^أ = ت^أ$

٨٩ اذا ضربت  $ت + ب$  في  $ت - ب$  يكون المحاصل  $ت^أ - ب^أ$  فلنا من ذلك قضية عامة وهي

حاصل مجموع كيتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعيهما

$(ت - ب) \times (ت + ب) = ت^أ - ب^أ$   
 $(ت^أ - ب^أ) \times (ت + ب) = ت^أ - ب^أ$   
 $(ت^أ - ب^أ) \times (ت + ب) = ت^أ - ب^أ$

نبذة في قسمة القنات

٩٠ نُقسم القنات مثل ما سولنا من الكيات . اي بان يُخرج من المقسوم كمية تماثل المقسوم طوي او بكتابتها على هيئة كسر دارجي. مثالة

$ت^أ + ب^أ = ت^أ$  او  $ت^أ / ب^أ$   
 اقم  $٩ ت^أ ي$   $١٢ ب^أ ك$   
 على  $- ٣ ت^أ$   $٢ ب^أ$   
 الخارج  $- ٢ ي$   $ب + ٢ ي$

اقم  $د \times (ت - ح + ي) = ت^أ - ح^أ + ي^أ$   
 على  $(ت - ح + ي)$   
 الخارج  $د$











## الثانية. كل جذر كمية ايجابية شفعي ملتبس الثالثة. الجذر الشفعي لكمية سلبية مستحيل

اما الاولى فواضحة ما تقدم (٨٠) واما الثانية فلأن الكمية الايجابية تحصل من + او من - X - على حد سوى. فـ جذر ث هو + ت او - ت فوضع للجذر علامتان للدلالة على الالتباس مكملا + ٣٦ ب و + ك ويرفع هذا الالتباس متى حصلت القوة من ضرب كميات معروفة علاماتها. واما الثالثة فلانه لا يمكن استخراج جذر شفعي لكمية سلبية. فـ جذر - ث ليس هو + ت ولا - ت لان + ت + X + ت = + ت و - ت - X - ت = + ت فسمي الجذر الشفعي لكمية سلبية كمية وهمية او محالية. ولكن قد تستعمل هذه الكميات الوهمية في الاعمال الجبرية لانها ببعض المعاملات تصير ممكنة. مثالة ٦ - ت X ٦ - ت = - ت وهي ممكنة. ويجب هنا ان يمتد في الجذور الوهمية ان علامة السلب واقعة تحت علامة الجذر كما مثلنا. ولكن - ٦ - ت X - ٦ - ت = ٦ - ت ومن فوائد هذه الكميات الوهمية ايضا الدلالة على فساد مسئلة. فلو قيل انقسم ١٤ الى قسمين حاصلها ٦٠ قيل ليكن احدهما ك والاخر ١٤ - ك فلنا ك X (١٤ - ك) = ٦٠ اي ١٤ ك - ك = ٦٠

وتعبر عن هذه المعادلة حسب القواعد الآتية لنا ك = ٧ + ١١ - ٦ وهذه كمية وهمية غير ممكنة. فالمسئلة فاسدة اي لا يمكن انقسام ١٤ الى قسمين حاصلها ٦٠ وقس على ذلك

١٠٣ كيفية تجذير الكميات المركبة سيأتي الكلام عليها في بعض النصول الآتية. واما هنا فلا ننظر الا الى كيفية استعلام الجذر المالي لمرصعات الكميات الثنائية والفضلية وهذه المرصعات لا يكون لها اكثر من ثلاثة اجزاء كما رأينا (٧٨) مثالها ث + ٢ ت ب + ب وفي الفضلية ث - ٢ ت ب + ب فحتما رأينا كمية مثل هذه جزآن منها قوتان تامتان والاخر حاصل جذري هاتين القوتين علما انها مربع كمية ثنائية او فضلية. ولنا لاستعلام جنرهما هذه القاعدة

خذ جذر الجزء الاول والثالث واربطها بعلامة الجزء الاوسط

فلو قيل ما هو جذر ك + ٢ + ك + ١ انبل جذر الجزء الاول اي ٢ - ك

وجذر الجزء الثالث أي واحد = ١ وعلامة الجزء الأوسط في + فإذا الجذر ك + ١

$$\text{جذر ك}^2 - ٢ك + ١ = \text{ك} - ١$$

$$\text{جذر ث}^2 + \text{ت} + \frac{١}{٤} = \text{ت} + \frac{١}{٤}$$

$$\text{جذر ث}^2 + \frac{١}{٤}\text{ت} + \frac{١}{٤} = \text{ت} + \frac{١}{٤}$$

$$\text{جذر ث}^2 + \text{ت ب} + \frac{٢}{٤}\text{ب} = \text{ت} + \frac{٢}{٤}\text{ب}$$

$$\text{جذر ث}^2 + \frac{٢}{٤}\text{ت ب} + \frac{٢}{٤}\text{ب} = \text{ت} + \frac{٢}{٤}\text{ب}$$

١٠٤ كل جذر لا يمكن ان يُدَلَّ عليه تمامًا بالاعداد يقال له اسم. مثاله  $\sqrt{٢٦}$  فهذا لا يمكن الوصول اليه تمامًا وهو بالكسر العشري  $٥٦١٢١٤٢١٤١$  تقريباً. وكل جذر ليس اسم فهو منطقي ولكن في ما يأتي تُطلق هذه اللفظة على كل كمية ليس لها علامة الجذر ولا دليل كسري

نبذة في تحويل الجذور

١٠٥ أولاً اذا اردت تحويل كمية منطقة الى هيئة كمية جذرية فرفقها الى قوة من اسم الجذر المفروض ثم اجعل لها علامة الجذر مع دليله

فلو قيل حول ت الى هيئة الجذر النوني لنيل قوتها النونية = ت ثم انها بوضع علامة الجذر والدليل نصير  $\sqrt[٥]{٢٠٠}$  فقد تحولت الى هيئة كمية جذرية بدون تغيير قيمتها لان  $\sqrt[٥]{٢٠٠} = \sqrt[٥]{٢٠٠} = \sqrt[٥]{٢٠٠}$

حول ٤ الى هيئة الجذر الكمي الجواب  $\sqrt[٤]{٦٤}$  او  $\sqrt[٤]{٦٤}$

حول ٣ الى هيئة الجذر الرابع الجواب  $\sqrt[٤]{٨١}$

حول  $\frac{١}{٢}\text{ت ب}$  الى هيئة الجذر المائي الجواب  $(\frac{١}{٢}\text{ت ب})^{\frac{١}{٢}}$

حول  $٢ \times \text{ت} - \text{ك}$  الى هيئة الجذر الكمي الجواب  $\sqrt[٢]{٢٢ \times \text{ت} - \text{ك}}$

حول  $\text{ت}^2$  الى هيئة الجذر الكمي الجواب  $\sqrt[٢]{\text{ت}^2}$

حول  $\text{ت}$  الى هيئة الجذر النوني

١٠٦ ثانياً لكي تحول كميات دلالتها مختلفة الى دلائل مشتركة بدون تغيير القيمة

(١) حول الدلائل الى مخرج مشترك

- (٢) رَقِّ كل كمية الى القوة المدلول عليها بصورة دليلها بعد تحويله  
(٣) اجعل للجميع علامة الجذر المدلول عليه بالخارج المشترك

مثاله لو قيل حَوِّلْ ت<sup>١</sup> ب<sup>١</sup> الى دليل مشترك لث<sup>١</sup> و<sup>١</sup> بالتحويل الى مخرج مشترك =  $\frac{1}{12}$  و  $\frac{2}{12}$  ثم بتريفة ت الى القوة المدلول عليها بصورة الدليل تصبح ت<sup>٢</sup> وهكذا ب تصبح ب<sup>٢</sup> والجذر دليله  $\frac{1}{12}$  فلنا ت<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> والقيمة لم تتغير لان ت<sup>٢</sup> = ت<sup>١</sup> ت<sup>٢</sup> ت<sup>٢</sup> وهكذا ب<sup>٢</sup> = ب<sup>١</sup> ب<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup>

حَوِّلْ ت<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> ك<sup>٢</sup> الى دليل مشترك الجواب ت<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> (ب<sup>٢</sup> ك<sup>٢</sup>)

حَوِّلْ ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> الى دليل مشترك الجواب ت<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>

حَوِّلْ ك<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> الى دليل مشترك الجواب ك<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>

حَوِّلْ ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> الى دليل مشترك الجواب ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>

حَوِّلْ (ت + ب) و<sup>٢</sup> (ك - ي) الى دليل مشترك الجواب (ت + ب) و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> (ك - ي) و<sup>٢</sup>

حَوِّلْ ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> الى دليل مشترك

حَوِّلْ ك<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> الى دليل مشترك

١٠٧ لاجل تحويل كمية الى ذات دليل مفروض اقسام دليلها على الدليل المفروض واكتب الخارج عن يسار الكمية ثم اجعل فوق الكل الدليل المعروض

فلو قيل حَوِّلْ ت<sup>١</sup> الى دليل لث<sup>١</sup> لث<sup>١</sup> = ت<sup>١</sup> + ت<sup>١</sup> فلنا ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>

حَوِّلْ ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> ك<sup>٢</sup> الى دليل لث<sup>٢</sup> الجواب (ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>) و<sup>٢</sup> (ك<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>)

حَوِّلْ ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup> الى دليل لث<sup>٢</sup> الجواب (ت<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>) و<sup>٢</sup> (ك<sup>٢</sup> و<sup>٢</sup>) و<sup>٢</sup>

١٠٨ لاجل اخراج بعض كمية من تحت علامة الجذر حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر وخذ جذرها الضلع واكتبه

قدام الضلع الآخر وعلامة الجذر بينهما. وهذه القاعدة مبنية على ما تقدم  
(١٠٠) من ان جذر حاصل كيتين يعدل حاصل جذريهما . وان لم  
يمكن حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر فلا يمكن  
اخراج شيء منها من تحت علامة الجذر

فلو قيل اخرج بعض  $\sqrt{18}$  من تحت علامة الجذر قيل  $\sqrt{18}$  ينقل الى ضلعين  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{9}$   
واحدهما قوة تامة من اسم الجذر اي  $\sqrt{9} = 3$  مربع  $3$  خذ جذر  $2 = \sqrt{2}$  فلنا  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  وعلى  
هذه الكيفية نفعل هذه الامثلة

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

١٠٩ ثم بعكس هذا العمل يدخل مسمى كمية جذرية تحت علامة الجذر اي يترقى  
الى قوة من اسم الجذر ثم يضرب في الاجراء الواقعة تحت علامة الجذر

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

نبذة في جمع الجذور وطرحها

١١٠ تجمع الجذور كغيرها من الكميات بكتابها متواليه مع علاماتها فيجتمع

٢ت و٢ب مومات + ٢ب وان تشابهت الكميات والدلائل فاجمع المسميات  
واكتب الاجزاء الجذرية عن يسار المجموع . مثاله

$$٢ت و٢ب مومات = ٢٥$$

٢ت	٢(ك+ح)٢	٢ت ي
٢٥	٢(ك+ح)٢	٢ت ي
٢٥ - ٢٢	٢(ك+ح)٢	٢ت ي
٢٥	٢(ك+ح)٢	٢ت ي

٢ت - ٢ب	٢ب ح
٢ت - ٢ب	٢ب ح
٢ت - ٢ب	٢ب ح
٢ت - ٢ب	٢ب ح

١١١ بعض الاحيان يقتضي اخراج بعض الكميات من تحت علامة الجذر لكي  
تُجمع . مثاله ٢٥ + ٢٢ باخراج بعضها من تحت علامة الجذر = ٢٥ + ٢٢ = ٢٧

٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧
٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧
٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧
٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧

٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧
٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧
٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧
٢٥ + ٢٢ = ٢٧	٢٥ + ٢٢ = ٢٧

ثم اذا اخطئت الكميات الجذرية او كانت دلائلها غير متشابهة فلا تجمع الا  
بكتابتها متوالية . مثاله مجموع ٢٥ و ٢٢ = ٢٥ + ٢٢ = ٢٧ ومجموع ٢ت  
و ٢ب = ٢ت + ٢ب

١١٢ اما طرح الجذور فهو مثل جمعها غير انه يجب تبديل علامة المطروح كما  
علمت في فصل الطرح البسيط



١١٤ تُضْرَبُ جذور كمية واحدة بجميع دلائلها بعد تحويلها الى مخرج مشترك .  
 مثاله  $ت^{\frac{1}{2}} \times ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{2}{6}} \times ت^{\frac{4}{6}} = ت^{\frac{6}{6}} = ت^1 = ت$   
 $ت^{\frac{5}{6}} \times ت^{\frac{2}{6}} = ت^{\frac{7}{6}}$

اضرب	$ت^{\frac{1}{2}} \times ت^{\frac{1}{3}}$	$ت^{\frac{1}{2}}$
في	$ت^{\frac{1}{3}}$	$ت^{\frac{1}{2}}$
المحاصل	$ت^{\frac{5}{6}}$	$ت^{\frac{2}{6}}$

اضرب	$ت^{\frac{1}{2}} (ت - ي)$	$ت^{\frac{1}{2}}$
في	$ت^{\frac{1}{3}} (ت - ي)$	$ت^{\frac{1}{2}}$
المحاصل	$ت^{\frac{5}{6}}$	$ت^{\frac{2}{6}}$

$ي^{\frac{1}{2}} \times ي^{\frac{1}{3}} = ي^{\frac{2}{6}} \times ي^{\frac{4}{6}} = ي^{\frac{6}{6}} = ي$   
 $ي^{\frac{5}{6}} \times ي^{\frac{2}{6}} = ي^{\frac{7}{6}}$   
 $ك^{\frac{1}{2}} \times ك^{\frac{1}{3}} = ك^{\frac{2}{6}} \times ك^{\frac{4}{6}} = ك^{\frac{6}{6}} = ك$

١١٥ وهكذا تُضْرَبُ القوت في الجذور . مثاله  $ت^{\frac{1}{2}} \times ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{2}{6}} \times ت^{\frac{4}{6}} = ت^{\frac{6}{6}} = ت$   
 $ت^{\frac{5}{6}} \times ت^{\frac{2}{6}} = ت^{\frac{7}{6}}$   
 وفق حدث من هذا الضرب ان صورة الدليل تماثل مخرجه نصير الكمية منطقة .  
 مثاله  $ت^{\frac{1}{2}} \times ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{2}{6}} \times ت^{\frac{4}{6}} = ت^{\frac{6}{6}} = ت$   
 $ت^{\frac{5}{6}} \times ت^{\frac{2}{6}} = ت^{\frac{7}{6}}$

١١٦ بعد تحويل الدلائل الى دليل مشترك ان كان للكيمات الجذرية  
 سميات منطقة فاجعل حاصل تلك السميات قدام حاصل الاجزاء الجذرية . مثاله  
 ت<sup>٢</sup> في س<sup>٣</sup> فاحصل السميات = ت<sup>٦</sup> س<sup>٣</sup> ثم اجعل هذا المحاصل قدام  
 حاصل الاجزاء الجذرية فتصيرت س<sup>٣</sup> ت<sup>٦</sup> د<sup>٢</sup> ك<sup>٢</sup> ب<sup>٢</sup> د<sup>٢</sup> تحت (ك<sup>٢</sup>) × ب<sup>٢</sup>  
 (د<sup>٢</sup>) = ت<sup>٦</sup> ب<sup>٢</sup> (ك<sup>٢</sup> د<sup>٢</sup>)

ت ضرب ت (ب + ك) ٢	ت م ٢	ت م ك
في ي (ب - ك) ٢	ب م ح ي	ب م ك
المحصل ت ي (ب - ك) ٢	ت ب م ك - ت ب ك	
ت ضرب ت ك ٢	ك م ٢	
في ب ي ٢	ي م ٢	
المحصل	ك ي ٢	

١١٧ متى ارتبطت الاجزاء المنطقية بالجذرية بواسطة علامة الجمع او الطرح يجب ان يُضرب كل جزء من المضروب في كل جزء من المضروب في

$$\begin{array}{r}
 \text{ت} + \text{م} + \text{ب} \\
 \text{س} + \text{د} \\
 \text{ت س} + \text{س م} + \text{ب} \\
 \text{ت م} + \text{د} + \text{ب} \\
 \hline
 \text{ت س} + \text{س م} + \text{ت م} + \text{د} + \text{ب} + \text{د}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{ت} + \text{م} + \text{ب} + \text{د} + \text{س} = \text{ت} + \text{م} + \text{ب} + \text{د} + \text{س} + \text{ر} + \text{ي} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ت (ت - ك) في (س - د) X (ت ك) ٢} \\
 \text{الجواب (ت س - ت د) X (ت ك - ت د) ٢}
 \end{array}$$

نبذة في قيمة الجذور

١١٨ يدل على قيمة الجذور بكتابتها على هيئة كسري دارجي. مثاله



المخرج من قيمة ثبات على  $\frac{\text{ثبات}}{\text{مب}} = \frac{\text{ثبات}}{\text{مب}}$  او بوضع علامة واحدة للصورة والمخرج.

مثالة  $\frac{\text{ثبات}}{\text{مب}}$

واذا كان جذر المقسوم والمقسوم عليه من اسم واحد ثم القسمة كما في غيرها وبوضع المخرج تحت علامة الجذر المشترك . مثالة

$$\frac{\text{ثبات}}{\text{مب}} \text{ على } \frac{\text{ثبات}}{\text{مب}} = \frac{\text{ثبات}}{\text{مب}} \text{ و } (\text{ك} \text{ ي}) \text{ على } \text{ي} = (\text{ك} \text{ ي}) \text{ على } (\text{ي}) = (\text{ك})$$

$\frac{\text{ث} + \text{ك}}{\text{ث}}$	$\frac{\text{د ح ك}}{\text{ح}}$	$\frac{\text{ث ك}}{\text{ك}}$
$\frac{\text{ث} + \text{ك}}{\text{ث}}$	$\frac{\text{د ح ك}}{\text{ح}}$	$\frac{\text{ث ك}}{\text{ك}}$
		المخرج

$\frac{\text{ث} \text{ ي}}{\text{ث}}$	$\frac{\text{ث ح}}{\text{ح}}$
$\frac{\text{ث} \text{ ي}}{\text{ث}}$	$\frac{\text{ث ك}}{\text{ك}}$
$\frac{\text{ث} \text{ ي}}{\text{ث}}$	المخرج

١١٩ تقسم جذور كمية واحدة بطرح دليل المقسوم عليه من دليل المقسوم .  
مثالة  $\text{ث} + \text{ث} = \text{ث} = \text{ث} = \text{ث}$

$\frac{\text{ث} + \text{ث}}{\text{ث}}$	$\frac{\text{ث ك}}{\text{ك}}$	$\frac{\text{ث} \text{ ث}}{\text{ث}}$
$\frac{\text{ث} + \text{ث}}{\text{ث}}$	$\frac{\text{ث ك}}{\text{ك}}$	$\frac{\text{ث} \text{ ث}}{\text{ث}}$
		المخرج

$\frac{\text{ر} \text{ ي}}{\text{ر}}$	$\frac{\text{ب} + \text{ي}}{\text{ب}}$
$\frac{\text{ر} \text{ ي}}{\text{ر}}$	$\frac{\text{ب} + \text{ي}}{\text{ب}}$
$\frac{\text{ر} \text{ ي}}{\text{ر}}$	المخرج

ومكنا في قسمة الجذور على القوت او عكس. مثاله  $ت^2 + ت = ت^2 - ت = ٢ - ٢ = ٠$   
 $ت^2 + ٥ - ٥ = ٢ - ٥ = -٣$

١٢٠ بعد تحويل الجذور الى دليل مشترك ان كان لما مسميات منطقة نُقسم أولاً  
 ويوضع الخارج فقام الخارج من قسمة الجذور. مثاله  $ت$  س  $٢٠$  د على  $٢٠$  ت  $٢٠$  =  
 س  $٢٠$  د

اقم	٢٤ ك	٢٠ ت	ب	٢ ك	٢ ك
على	٦	٢٠ ت	ب	٢ ك	٢ ك
الخارج	٤	٢ ك	ب	٢ ك	٢ ك

اقم	ب	٢ ك	٢ ك
على	ب	٢ ك	٢ ك
الخارج	ب	٢ ك	٢ ك

$ت$  ب (ك ب)  $+ ت$  (ك)  $= ت$  ب (ك ب)  $- ت$  (ك)  $= ت$  (ك)  $- ت$  (ك)  $= ٢ - ٢ = ٠$   
 $ب$  (ب)  $= ٢$  (ب)  $= ٢$

اقم	٢	٢ ب	س	على	٢	٢ ت
اقم	١٠	١٠ ب	١٠ س	على	١٠	١٠ ت
اقم	١٠	١٠ ب	١٠ س	على	١٠	١٠ ت
اقم	٨	٨ ب	٨ س	على	٨	٨ ت
اقم	٢	٢ ب	٢ س	على	٢	٢ ت
اقم	١٦	١٦ ب	١٦ س	على	١٦	١٦ ت

نبذة في ترفية الجذور

١٢١ الجذور تتقوى مثل القوت اي بضرب دلائلها في دليل القوت المفروضة  
 مثاله مربع  $ت = ت^2$   $- ت^2 = ٢ - ٢ = ٠$  والقوت النونية من  $ت = ت^2$   $- ت^2 = ٢ - ٢ = ٠$  والقوت  
 الخامسة من  $ت = ت^2$   $- ت^2 = ٢ - ٢ = ٠$  او بالتحويل الى دليل مشترك (ت<sup>٥</sup>)  
 $= (ت^٥) - (ت^٥) = ٠$

١٢٢ كل جذر يترقى الى قوة من احو رفع علامة الجذر . مثاله مكعب  
 $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$  والقوة النونية من  $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$   
 ومكعب  $ت^١ + ت^٢ = ت^٣$   
 واذا كان للجذور مسميات منطقية يجب ترفيعها ايضاً . مثاله مربع  $ت^١ = ت^٢$   
 $ت^١ + ت^٢ = ت^٣$  ومربع  $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$  (ك - ي)  
 ومكعب  $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$   
 واذا ارتبطت المنطقة بالجذور بعلامة الجمع او الطرح تترقى بالضرب كما علمت  
 فيها تقدم (٧٧) مثاله فلو قيل ما هو مربع  $ت + ت^١$  وت -  $ت^١$

$\begin{array}{r} ت - ت^١ \\ ت - ت^١ \\ ت - ت^١ \\ ت - ت^١ \\ ت - ت^١ \end{array}$	$\begin{array}{r} ت + ت^١ \\ ت + ت^١ \\ ت + ت^١ \\ ت + ت^١ \\ ت + ت^١ \end{array}$
$\begin{array}{r} ت - ت^١ + ت^٢ \\ ت - ت^١ + ت^٢ \\ ت - ت^١ + ت^٢ \\ ت - ت^١ + ت^٢ \\ ت - ت^١ + ت^٢ \end{array}$	$\begin{array}{r} ت + ت^١ + ت^٢ \\ ت + ت^١ + ت^٢ \\ ت + ت^١ + ت^٢ \\ ت + ت^١ + ت^٢ \\ ت + ت^١ + ت^٢ \end{array}$

ما هو مكعب  $ت - ت^١$   
 ما هو مكعب  $ت + ت^١$

١٢٣ الجذور تجذر حسباً تقدم (٩٨) اي بقسمة دلائلها على دليل الجذر  
 المفروض او بوضع علامة الجذر مع دليله فوق الكمية . مثال الاول الجذر المربع من  
 $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$  والجذر الكمي من  $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$  (ك - ي) ومثال  
 الثاني الجذر النوني من  $ت^١ = ت^٢ = ت^٣$  (ك - ي)

١٢٤ اذا ضربت كمية جذرية في اخرى نفاهاها وكان المضروب فيه قوة دليلها  
 اقل من دليل المضروب بواحد يكون الحاصل كمية منطقية . مثاله  
 $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  و  $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  و  $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  (ك - ي) ومثال  
 $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  و  $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  و  $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  (ك - ي) ومثال  
 $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  و  $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  و  $ت^١ \times ت^٢ = ت^٣$  (ك - ي)



$$\frac{6}{120} = \frac{5 \times 6}{5+5} = \frac{6}{5}$$

$$= \frac{(2-)(1-2-2) \times 8}{(2-)(1-2-2)(1+2+2)} = \frac{8}{1+2+2}$$

$$2-2+2-2$$

حول  $\frac{2}{2}$  الى كسر مخرج منطوق

حول  $\frac{2}{2}$  الى كسر مخرج منطوق

١٢٧ نرى ما تقدم ان استخراج جذر كمية صماء كسراً يسهل بتحويل الصورة الى المخرج الى كمية منطوقة. فلا يلزم حينئذ سوى استخراج جذر احدهما اذ يكون الآخر منطوقاً.

مثاله جذر ث المال  $\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$  او  $\frac{2}{2}$

$$\text{جذر } \frac{2}{2} \text{ المال} = \frac{2}{2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{2}$$

امثلة

- (١) ما هو الجذر الرابع من ٨ ت
- (٢) ما هو الجذر السادس من (ت + ب) ك
- (٣) ما هو الجذر الثوني من (ك - ي) ح
- (٤) ما هو الجذر الكمي من - ١٢٥ ت ك
- (٥) ما هو الجذر المالي من  $\frac{2}{2}$  ح
- (٦) ما هو الجذر الخامس من  $\frac{2}{2}$  ت ك
- (٧) ما هو الجذر المالي من ك - ٦ ب ك + ٩ ب
- (٨) ما هو الجذر المالي من ت + ت + ي + ٤
- (٩) حول ت ك الى هيئة الجذر السادس

- (١٠) حَوْل - ٣ الى هيئة الجذر الكمي
- (١١) حَوْل ثاوت الى دليل مشترك
- (١٢) حَوْل ٤ و ٥ الى دليل مشترك
- (١٣) حَوْل ثاوت الى دليل
- (١٤) حَوْل ٣ و ٤ الى دليل
- (١٥) اخرج بعض ٢٤٩ من تحت علامة الجذر
- (١٦) اخرج بعض ٢٤ - ٢٣ من تحت علامة الجذر
- (١٧) ما هو مجموع ١٦ ثاوت ٢ و ٤ ثاوت ٢ و فضلها
- (١٨) ما هو مجموع ١٦ ١٦٣ و ٢٤
- (١٩) اضرب ٨ ١٨ في ٥ ٢٤
- (٢٠) اضرب ٤ + ٢ ٢ في ٢
- (٢١) اضرب ث (ث + ثا) ب (ث - ثا) ١
- (٢٢) اضرب ٢ (ث + ب) ب (٢ + ث) ٢
- (٢٣) اقس ٦ ٢٤ على ٢ ٢
- (٢٤) اقس ٤ ٧٣ على ٢ ١٨
- (٢٥) اقس ٧ ٧ على ٧
- (٢٦) اقس ٨ ١٢ ٢٤ على ٢ ٢
- (٢٧) ما هو مكعب ١٧ ٢١
- (٢٨) ما هو مربع ٥ + ٢
- (٢٩) ما هي النوع الرابعة من ١/٢
- (٣٠) ما هو مكعب ٢ - ٢
- (٣١) بماذا نصير ٢ الى منطقة
- (٣٢) بماذا نصير ٥ - ٢ الى منطقة
- (٣٣) حَوْل ٢ الى مخرج منطقي
- (٣٤) حَوْل ٦ الى مخرج منطقي

## الفصل العاشر

في القسمة على المركب وفي الماد الأكبر

١٢٢ اذا اردت القسمة على مقسوم عليه مركب فاقسم الجزء الاول من المقسوم على الاول من المقسوم عليه واضرب كل المقسوم عليه في الخارج واطرح الحاصل من المقسوم . ثم انزل من اجزاء المقسوم ما يتنضي وعلّم جرّاً الى نهاية العمل . وهذه صورته وامثلة

$$(1) \text{ اقسم } ت س + م ب س + ت د + ب د \text{ على } ت + ب$$

$$ت + ب \text{ ) } ت س + م ب س + ت د + ب د \text{ ( } س + د$$

$$ت س + م ب س$$

$$+ ت د + ب د$$

$$+ ت د + ب د$$

تنبه . قبل القسمة يجب ترتيب الاجزاء حتى يكون الحرف الاول في المقسوم عليه اولاً في المقسوم . وان تكون القوة العليا فيها اولاً وتكتب بقية القويات على رتبة قواها

(٢) اقسم  $ت س + م ب + ت د + ب د$  على  $ت + ب$  فان اخذنا  $ت$  للجزء الاول من المقسوم عليه يجب ان نأخذ  $ت$  للاول في المقسوم وتكتب البقية حسب قويات

$$ت + م ب + ت د + ب د \text{ ) } ت س + م ب + ت د + ب د \text{ ( } ت + ب$$

$$ت س + م ب + ت د + ب د$$

$$ت س + م ب + ت د + ب د$$

ويجب في هذه الاعمال ملاحظة العلامات حسب القواعد المتقدمة في الطرح والضرب والقسمة

(٢) اقسم  $ت س + م ب + ت د + ب د$  على  $ت + ب$

على ٢ ت - ي فترتيب الاجزاء حسب قوا ت

$$\begin{array}{r}
 \text{ت-ي} \quad ٦ \text{ ت}^١ \text{ك}^١ - ٢ \text{ ت}^٢ \text{ك}^١ - ١ \text{ ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 ٦ \text{ ت}^١ \text{ك}^١ - ٢ \text{ ت}^٢ \text{ك}^١ - ١ \text{ ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 ٢ \text{ ت}^٢ \text{ك}^١ + ١ \text{ ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 ٢ \text{ ت}^٢ \text{ك}^١ + ١ \text{ ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 ٢ \text{ ت}^٢ \text{ك}^١ - ١ \text{ ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 ٢ \text{ ت}^٢ \text{ك}^١ - ١ \text{ ت}^٣ \text{ك}^١
 \end{array}$$

١٢٣ قد رأينا في الضرب ان بعض الاجزاء احياناً تفى وعند القسمة تعود هذه الاجزاء فيكون في الخارج اجزاء لم تر في المقسوم

(١) اقسم ت + ك على ت + ك

$$\begin{array}{r}
 \text{ت} + \text{ك} \quad \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \quad \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^٢ \text{ك}^١ + \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^٢ \text{ك}^١ + \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^٢ \text{ك}^١ + \text{ت}^٣ \text{ك}^١
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{(٥) ت}^١ - \text{ت}^٢ \text{ك}^١ + \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \quad \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \quad \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١ \\
 \hline
 \text{ت}^١ \text{ك}^١ + \text{ت}^٢ \text{ك}^١ - \text{ت}^٣ \text{ك}^١
 \end{array}$$

(٦) اقسم ت + ت + ت + ب + ت + ب + ت + س + س على ت + ١

الخارج ت + ت + ب + ت + س

(٧) اقسم ت + ب - س - ت - ك - ب - ك + س ك على ت + ب - س

الخارج ١ - ك

(٨) اقسم ٣ ت - ١٣ ت ك + ١١ ت ك - ٨ ت ك + ٢ ك على ٣ ت -

الخارج ت - ٦ ت ك + ٢ ك

ت ك + ك

١٢٤ اذا بقيت بقية بعد انزال جميع الاجزاء تكتب فوق المقسوم عليه على

صورة كسر كما في الحساب



مثال ١: ت + ب (ت س + ب س + ت د + د ب + د ك) س + د + ت + ك

ت س + ب س

ت د + ب د

ت د + ب د

ك

مثال ١٠: د - ح (ت د - ت ح + ب د - ب ح + ي (ت + ب + د - د - ح

ت د - ت ح

ب د - ب ح

ب د - ب ح

ي

(١١) اقم ٦ ت + ك + ٢ ك - ٢ ت ب - ب ي + ٢ ت س + س ي + ح

الخارج ٢ ت + ي ح

(١٢) اقم ٢ ب - ٢ ت + ٢ ت ب - ب - ٦ ت - ٤ ب + ٢٢ على ب - ٢

الخارج ٢ ت + ٢ ت - ٤ ب + ٢٢

(١٣) ت + ت (ت س + س س + ت ب + ت ب + د ب (س + د ب

ت س + س ب

ت ب + د ب

ت ب + د ب

(١٤) اقم ت + ت + ت ر + ت ر ي + ر ي على ت + ت

الخارج ١ ر + ت

(١٥) اقم ٢ ك - ٢ ت ك + ٢ ت ك - ت على ك - ت

(١٦) اقم ٢ ي - ١٩ ي + ٢٦ ي - ١٧ ي على ي - ٨

(١٧) اقم ٢ ك - ١ على ك - ١

(١٨) اقم ٤ ك - ١ ك + ٦ ك - ٢ على ٢ ك + ٢ ك - ١

(١٩) اقم ٢ ت + ٤ ت ب + ٢ ب على ت + ٢ ب

(٢٠) اقسام ك - ث ك + ث ك - ث على ك - ث ك + ث

١٢١ اذا اقسمت فضلة قوتين على فضلة كيهما الاصلين يخرج من ذلك سلسلة قوات

مثاله (ي - ث) + (ي - ث) = ي + ث

(ي - ث) + (ي - ث) = ي + ث + ي + ث

(ي - ث) + (ي - ث) = ي + ث + ي + ث + ي + ث

(ي - ث) + (ي - ث) = ي + ث + ي + ث + ي + ث + ي + ث

وذلك يبرهن بالضرب

وهكذا يبرهن ان فضلة قوات كيهما اذا كان دليلها عدد شفع يمكن قسمتها على مجموع الكيهما

مثاله (ي - ث) + (ي + ث) = ي - ث

و (ي - ث) + (ي + ث) = ي - ث + ي + ث - ث

و (ي - ث) + (ي + ث) = ي - ث + ي + ث - ث + ي + ث - ث

- ث

ومجموع قوتين من كيهما ان كان الدليل وترًا ينقسم على مجموع الكيهما

مثاله (ي + ث) + (ي - ث) = ي - ث + ي + ث

(ي + ث) + (ي - ث) = ي - ث + ي + ث - ث + ي + ث

(ي + ث) + (ي - ث) = ي - ث + ي + ث - ث + ي + ث - ث + ي + ث - ث

ث + ي + ث

في العاد الأكبر للكيتين

١٢٢ لكي نجد العاد الأكبر اقسام احدى الكيتين على الاخرى والمقسوم عليه على الباقي ثم المقسوم عليه الثاني على الباقي الثاني ولم جراً الى ان لا يبقى شيء فيكون المقسوم عليه الاخير العاد الأكبر. وان أريد العاد الأكبر لثلاث كميات يجب اخذ لاثنتين منها العاد الأكبر بين الثالثة والعاد الأكبر الأول وهكذا نعددت الكميات

١٢٣ في اخذ العاد الأكبر لكميات مركبة يجب احياناً تنقيص المقسوم عليه ان

زيادة المقسوم. ويمكن ذلك بدون تغيير العاد الأكبر اذا ضرب او انقسم احدهما على كمية لا ينقسم عليها الآخر وليس فيها جزء ينقسم عليه الآخر. مثالة العاد الأكبر بين  
ت ب و ت س هـ وت وان ضربت احدهما في د فيكون العاد الأكبر بين  
ت ب د و ت س هـ وت ايضاً. وان فرض ت ب و ت س د يكون العاد  
الأكبر بينهما ت ايضاً. واذا انقسم ت س د على د يبقى ت س فيكون ت العاد  
الأكبر بينهما كما كان. وبحسب ذلك يمكن تسهيل العمل في اخذ العاد الأكبر بقسمة  
المقسوم عليه على كمية ليست بمقسوم عليه للمقسوم او ضرب المقسوم في كمية لا تعد المقسوم  
عليه

مثال اول ما هو العاد الأكبر بين ٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك و ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك  
وهذه صورة العمل

$$\begin{array}{r} ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك \\ ٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك \\ \hline ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك \end{array}$$

انقسم على ٢ ك

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك \\ \hline ٦ ت + ٩ ت ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ ت - ٢ ك \\ ٢ ت - ٢ ك \\ \hline ٢ ت - ٢ ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ ت - ٢ ك \\ ٢ ت - ٢ ك \\ \hline ٢ ت - ٢ ك \end{array}$$

فالعاد الأكبر بين الكبيرين ٢ ت + ٢ ك

٢ ما هو العاد الأكبر بين ٢ ك - ٢ ك و ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك

الجواب ٢ ك + ٢ ك

٣ ما هو العاد الأكبر بين ٢ ك + ٢ ك و ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك

٤ ما هو العاد الأكبر بين ٢ ك - ٢ ك - ٢ ك و ٢ ك - ٢ ك - ٢ ك

الجواب ٢ ك - ٢ ك - ٢ ك

٥ ما هو العاد الأكبر بين ٢ ت - ٢ ت و ٢ ت - ٢ ت

٦ ما هو العاد الأكبر بين ٢ ت - ٢ ت و ٢ ت - ٢ ت

٧ ما هو العاذا الأكبر بين ك<sup>٢</sup> - ا وك<sup>١</sup> + ي الجواب ك + ا

٨ ما هو العاذا الأكبر بين ت<sup>١</sup> - ت ب - ٢ ب<sup>١</sup> وت<sup>١</sup> - ٣ ت ب + ٢ ب<sup>١</sup>

٩ ما هو العاذا الأكبر بين ت<sup>٤</sup> - ك<sup>١</sup> وت<sup>١</sup> - ت<sup>١</sup> ك + ت<sup>١</sup> ك - ك<sup>١</sup>

١٠ ما هو العاذا الأكبر بين ت<sup>١</sup> - ت ب<sup>١</sup> وت<sup>١</sup> + ٢ ت ب + ب<sup>١</sup>

يفضح ما تقدم

(١) ان فضلة قوتين شغبيتين من اسم واحد تنقسم على مجموع جذريهما

(٢) مجموع قوتين وترتبتين من اسم واحد ينقسم على مجموع جذريهما

وعلى هذه القواعد تحل عبارات جبرية كثيرة الى اضلاعها

وقد يكون احد الاضلاع من اسم واحد او ذا جزء واحد . مثالة ت ب + ت س

فالامر ظاهر ان احد ضلعها ت والآخر ب + س وقد يكون كلا الضلعين كمية ثنائية

مثالة ت<sup>٢</sup> + ٢ ت ب + ب<sup>٢</sup> فالامر ظاهر ان ضلعها هما (ت + ب) X (ت + ب)

(٣) ما ضلعا ت ب<sup>١</sup> س + ٥ ت ب<sup>١</sup> + ت ب<sup>١</sup> س فالامر ظاهر ان

ت وب<sup>١</sup> ضلع من كل جزء فيكون الضلعان ت ب<sup>١</sup> (س + ٥ ب<sup>١</sup> س)

(٤) ما ضلعا ٢٥ ت<sup>٢</sup> - ٣٠ ت<sup>١</sup> ب + ١٥ ت ب<sup>١</sup>

الجواب ٥ ت<sup>٢</sup> (٥ ت<sup>٢</sup> - ٦ ت ب + ٢ ب<sup>١</sup>)

(٥) ما ضلعا ٢ ت<sup>٢</sup> ب + ٩ ت<sup>١</sup> س + ١٨ ت<sup>١</sup> ك ي

الجواب ٢ ت<sup>٢</sup> (ب + ٣ س + ٦ ك ي)

(٦) ما ضلعا ٨ ت<sup>١</sup> س ك - ١٨ ت س ك<sup>١</sup> + ٢ ت س<sup>١</sup> س ي - ٣٠ ت<sup>١</sup> س<sup>١</sup> ك

الجواب ٢ ت س (٤ ت ك - ٩ ك<sup>١</sup> + س<sup>١</sup> ي - ١٥ ت<sup>١</sup> س<sup>١</sup> ك)

(٧) ما ضلعا ٢٤ ت<sup>١</sup> ب<sup>١</sup> س ك - ٣٠ ت<sup>١</sup> ب<sup>١</sup> س<sup>١</sup> ي + ٣٦ ت<sup>١</sup> ب<sup>١</sup> س د

+ ٦ ت ب س

الجواب ٦ ت ب س (٤ ت ب ك - ٥ ت<sup>١</sup> ب<sup>١</sup> س<sup>١</sup> ي + ٦ ت<sup>١</sup> ب<sup>١</sup> د + ١)

(٨) ما ضلعا ت<sup>٢</sup> - ٢ ت ب + ب<sup>٢</sup> الجواب (ت - ب) X (ت - ب)

(٩) ما ضلعا ٦٤ ت<sup>٢</sup> ب<sup>١</sup> س<sup>١</sup> - ٤٨ ت ب<sup>١</sup> س<sup>١</sup> د + ٩ س<sup>١</sup> د<sup>٢</sup>

الجواب (٨ ت ب س - ٣ س د) X (٨ ت ب س - ٣ س د)

(١٠) ما ضلعا ا<sup>١</sup> - ب<sup>١</sup> الجواب (١ + ب) X (١ - ب)

(١١) ما ضلعا ١٦ ت<sup>١</sup> س<sup>١</sup> - ٩ د<sup>٢</sup>

الجواب (٤ ت س + ٣ د) X (٤ ت س - ٣ د)

- (١٣) حل ث - ب<sup>١</sup> الى اربعة اضلاع  
 (١٤) حل ٨ ث - ٨ ب<sup>١</sup> الى ثلاثة اضلاع  
 (١٤) حل ١ + ٢٧ ب<sup>١</sup> الى ضلعها  
 (١٥) حل ٨ ث + ٢٧ ب<sup>١</sup> الى ضلعها  
 (١٦) حل ن<sup>١</sup> + ٢ ن<sup>٢</sup> + ن الى ثلاثة اضلاع  
 (١٧) حل ث<sup>٢</sup> ك - ك<sup>٢</sup> الى ثلاثة اضلاع

## الفصل الحادي عشر

في ترقية الكميات الثنائية وبسطها

١٣٤ قد رأينا سابقاً كيفية ترقية الكميات بالضرب غير انه اذا كانت القوة المطلوبة عالية يطول بها العمل جداً . وقد اخترع الفيلسوف اسحق نيوتن قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية ولشدّة اعتبارها عند علماء هذا الفن ننشوها على قدر في كيسة وستمنستر في لندن

١٣٥ اذا ضربت كمية مثل ث + ب في نفسها فلنا هذه القوات

$$(ث + ب)^2 = ث^2 + ٢ ث ب + ب^2$$

$$(ث + ب)^3 = ث^3 + ٣ ث^2 ب + ٣ ث ب^2 + ب^3$$

$$(ث + ب)^4 = ث^4 + ٤ ث^3 ب + ٦ ث^2 ب^2 + ٤ ث ب^3 + ب^4$$

$$(ث + ب)^5 = ث^5 + ٥ ث^4 ب + ١٠ ث^3 ب^2 + ١٠ ث^2 ب^3 + ٥ ث ب^4 + ب^5$$

فترى من ذلك ان الدلائل جارية على اسلوب واحد ابداً . اي ان دليل ث في الجزء الأول ودليل ب في الجزء الاخير يعدل دليل اسم القوة المفروضة . وان دلائل ث مهبط واحداً في كل جزء . وان دلائل ب تعلق واحداً في كل جزء بعد الأول

واذا قطعنا النظر عن المسميات نرى ما سبق ان دلائل اية قوة فرضت من كمية ثنائية تعدل اسم القوة المفروضة في الجزء الأول والاخير وان دلائل الاصلية مهبط ودلائل التابعة تعلق واحداً في كل جزء

تعيه . يراد بالاصلية الجزء الأول من الكمية الثنائية وبالتابعة الجزء الثاني . مثاله  
في ت + ب سميت ت الاصلية وب التابعة

ثم ان قيل ما هي القوة الثامنة من ت + ب بقطع النظر عن المسميات فالجواب  
ت<sup>١</sup> + ت<sup>٢</sup> + ب + ت<sup>٣</sup> + ت<sup>٤</sup> + ت<sup>٥</sup> + ت<sup>٦</sup> + ت<sup>٧</sup> + ت<sup>٨</sup> + ب

ثم يرى عدد الاجزاء أكثر من الأحاد في اسم القوة بواحد ابتداء . اي في المربع  
ثلاثة اجزاء وفي المكعب اربعة وفي القوة الرابعة خمسة وفي الخامسة ستة وهلم جرا

١٢٦	ثم لكي نجد المسميات اذا نظرنا الى القوات المتقدمة (١٢٥) نرى
مسميات المربع	١ ٢ ٣ ٤ = ٢
ومسميات المكعب	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ = ٢
ومسميات القوة الرابعة	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ = ٢
ومسميات القوة الخامسة	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ = ٢

فدري ان مسمى الجزء الأول هو واحد ابتداء . وان مسمى الجزء الثاني يعدل دليل  
القوة المفروضة . ومن ثم اذا ضرب مسمى جزء في دليل الكمية الاصلية وانقسم المحاصل  
على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء الذي يملؤه

واذا نظرنا الى المسميات المذكورة آنفا نرى انها ولا تزيد الى حد معلوم ثم يهبط  
كما زادت فتكون متساوية في الجزء الأول والاخير وفي الثاني والذي قبل الاخير  
وفي الثالث والذي قبل ما قبل الاخير . فاذا عرفنا مسميات نصف الاجزاء نعرف  
منها مسميات البقية

وفي اية قوة فرضت من كمية ثنائية مثل ت + ب يعدل مجموع المسميات تلك  
القوة من اثنين كما ترى في هذا

١٢٧ ان النضايا الماضي ذكرها قد انحصرت في نظرية واحدة تسمى النظرية  
الثنائية . وفي

انه في كل قوة من كمية ثنائية يكون دليل الاصلية مساويا لاسم  
القوة . ومن ثم يهبط واحدا في كل جزء . ودليل التابعة يبتدئ بواحد

في الجزء الثاني. ومن ثمَّ يعلو واحداً في كل جزء  
 مسمى الجزء الاول واحداً ومسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة  
 المفروضة. ومن ثمَّ اذا ضرب مسمى جزء في دليل الاصلية وانقسم على  
 دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء التالي له  
 وتكتب هذه النظرية في عبارة جبرية هكذا

$$(ت + ب) = ت^{\circ} + ت^{\circ} \times ن + ت^{\circ} \times ب + ن^{\circ} \times ن - ت^{\circ} \times ب - ب^{\circ} \times ن \text{ الى آخره}$$

مثال اول ما هي القوة السادسة من ك + ح  
 الجواب ك<sup>٦</sup> + ٦ ك<sup>٥</sup> ح + ١٥ ك<sup>٤</sup> ح<sup>٢</sup> + ٢٠ ك<sup>٣</sup> ح<sup>٣</sup> + ١٥ ك<sup>٢</sup> ح<sup>٤</sup> + ٦ ك<sup>١</sup> ح<sup>٥</sup> + ح<sup>٦</sup>  
 ٢ (د + ح) = د<sup>٥</sup> + ٥ د<sup>٤</sup> ح + ١٠ د<sup>٣</sup> ح<sup>٢</sup> + ١٠ د<sup>٢</sup> ح<sup>٣</sup> + ٥ د<sup>١</sup> ح<sup>٤</sup> + ح<sup>٥</sup>  
 ٣ ما هي القوة الخامسة من ك + ح

بوضع ت عوضاً عن ك ووضع ب عوضاً عن ح لنا  
 (ت + ب) = ت<sup>٥</sup> + ٥ ت<sup>٤</sup> ب + ١٠ ت<sup>٣</sup> ب<sup>٢</sup> + ١٠ ت<sup>٢</sup> ب<sup>٣</sup> + ٥ ت<sup>١</sup> ب<sup>٤</sup> + ب<sup>٥</sup>

ثم يترجع ك و ح عوضاً عن ت وب لنا  
 ك<sup>٥</sup> + ١٥ ك<sup>٤</sup> ح + ٩٠ ك<sup>٣</sup> ح<sup>٢</sup> + ٢٧٠ ك<sup>٢</sup> ح<sup>٣</sup> + ٤٠٥ ك<sup>١</sup> ح<sup>٤</sup> + ح<sup>٥</sup> ٢٤٣ ح  
 ٤ ما هي القوة السادسة من ك + ح

الجواب ٧٢٩ ك<sup>٦</sup> + ٢٩١٦ ك<sup>٥</sup> ح + ٤٨٦٠ ك<sup>٤</sup> ح<sup>٢</sup> + ٤٢٢٠ ك<sup>٣</sup> ح<sup>٣</sup> + ٢١٦٠ ك<sup>٢</sup> ح<sup>٤</sup> + ٥٧٦ ك<sup>١</sup> ح<sup>٥</sup> + ح<sup>٦</sup>

١٢٨ الكمية الفضلية تترقى كالاجايبه غير ان علاماتها تنعبر فان (ت - ب)

$$= ت^{\circ} - ٢ ت^{\circ} ب + ب^{\circ}$$

$$(ت - ب)^2 = ت^2 - ٢ ت ب + ب^2$$

$$(ت - ب)^4 = ت^4 - ٤ ت^3 ب + ٦ ت^2 ب^2 - ٤ ت ب^3 + ب^4$$

فندري ان كل جزء يقع في قوة وترية من الكمية التابعة تكون علامته سلبية

القوة السادسة من ك - ح = ك<sup>٦</sup> - ٦ ك<sup>٥</sup> ح + ١٥ ك<sup>٤</sup> ح<sup>٢</sup> - ٢٠ ك<sup>٣</sup> ح<sup>٣</sup> + ١٥ ك<sup>٢</sup> ح<sup>٤</sup> - ٦ ك<sup>١</sup> ح<sup>٥</sup> + ح<sup>٦</sup>

١٢٩ متى كان احد جزئي كمية ثنائية واحداً يمكن تركه الا من الجزء الاول او  
الاخر لان كل قوة من واحد واحد وضرب كمية في واحد لا يغيرها شيئاً. مثالة

$$1 + 1 \times k + 1 \times k + k = (1 + k)$$

وذاك = ك' + ك' + ك' + ك' + ١

فلا داعي الى كتابة الواحد الآخر حفظ الدليل لاجل معرفة المسميات. وليس لما  
لزم أيضاً من هذا التنبيل لاننا نعرف الدليل من كون مجموع الدليلين في كل جزء  
يعدل اسم النوع المفروضة

مثال (۱-۷)  $1 - 7 + 10 - 20 + 10 - 7 + 1 = (1-7)$

نرى ما سبق ان العبارة الدالة على قوة الجزء الأول من جذرها واحد هي بسيطة جداً. فاذا تحولت ثنائية الى اخرى الجزء الأول منها واحد يمكن الدلالة على كل قوة منها بالعبارة المذكورة. مثالة  $t + k = (1 + t^k)$  او  $t + k = t^k X$  فاذا  $(1 + t^k)$

(ث + ك) = ث<sup>٢</sup> × (١ + ك) وبالرمط نصير

$T^2 \times (T^{2+1} + T^{\frac{1}{2}})$  وقس على ذلك

١٤٠ متى كان دليل قوة مفروضة من ثنائية صحيحاً إيجابياً تنتهي السلسلة حسبنا  
نقدّم. ومتى كان دليل القوة المفروضة سلبية لا تنتهي السلسلة بل يمكن الاستداد فيها  
إلى غير نهاية مثل كثير من الكسور العشرية . مثالة لو قيل أبسط  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ ، أو  
 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  لنقول  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  ،  
فترى هنا السميات تملو في كل جزء واحداً والعلامات ايجابية وسلبية بالتبادل

١٤١ ثم ان النظرية الثنائية تنبذ جذراً في تجذير الثنائيات لانها تدل على الجذر كما تدل على القوة غير ان دليل القوة صحيح ودليل الجذر كسر مثالة (ت + ب) فان كانت ن عوضاً عن ٢ مثلاً تكون العبارة دالة على قوة وان كانت عوضاً عن ٤ مثلاً تكون جذراً

إذا انبسط جزء بواسطة النظرية الثنائية فالسلسلة لا تنتهي لأن السلسلة انما تنتهي عند ما يصير دليل الاصلية صفراً حتى تنفد المسلمات . والكرار لا يمكن ان ينتهي الى صفر بطرح واحد منه على التوالي . فان كان الدليل في الجزء الاول  $\frac{1}{k}$  يكون في الثاني





أمثلة

١ ما هي القوة الثامنة من (ت + ب)

$$\text{الجواب } ت^8 + ٨ ت^٧ ب + ٢٨ ت^٦ ب^٢ + ٥٦ ت^٥ ب^٣ + ٧٠ ت^٤ ب^٤ + ٥٦ ت^٣ ب^٥ + ٢٨ ت^٢ ب^٦ + ٨ ت ب^٧ + ب^٨$$

٢ ما هي القوة السابعة من ت - ب

$$٢ \text{ أبسط } ١ - ب \text{ أو } (١ - ت)^٢$$

الجواب ١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ + ت^٦ + ت^٧

$$٤ \text{ أبسط } ت - ب \text{ أو } ح \times (ت - ب)^٣$$

الجواب ح (١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ + ت^٦ + ت^٧)

أو (١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ + ت^٦ + ت^٧) ح

$$٥ \text{ أبسط } (ت + ب)^٢$$

الجواب ت + ت^٢ - ٢ ت ب + ب^٢

$$٦ \text{ أبسط } (ت + ب)^٣$$

الجواب ١ + ٣ ت + ٣ ت^٢ + ت^٣ - ٣ ت ب + ٣ ت^٢ ب - ت^٣ ب + ب^٣

$$٧ \text{ أبسط } (س + ك)^٢$$

الجواب س (١ + ك + ك^٢ + ك^٣ + ك^٤ + ك^٥ + ك^٦ + ك^٧)

$$٨ \text{ أبسط } \frac{١}{٢} (س + ك)^٢ \text{ أو } د \times (س + ك)^٢$$

الجواب س (١ + ك + ك^٢ + ك^٣ + ك^٤ + ك^٥ + ك^٦ + ك^٧) + د (١ + ك + ك^٢ + ك^٣ + ك^٤ + ك^٥ + ك^٦ + ك^٧)

٩ ما هي القوة الخامسة من (ت + ب)

١٠ ما هي القوة الرابعة من ت + ب + ك

$$١١ \text{ أبسط } (ت - ك)^٢$$

$$١٢ \text{ أبسط } (١ - ت)^٢$$

$$١٣ \text{ أبسط } (ت - ك)^٢$$

$$١٤ \text{ أبسط } ح (ت - ب)^٢$$

## الفصل الثاني عشر

في تجذير الكميات المركبة

١٤٣ فاعلة. رتب الكميات على موجب قوت احد حروفها حتى تكون العليا اولاً. وهكذا على التوالي. ثم خذ جذر الجزء الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب. ورق ذلك الجزء الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحه من الكمية نفسها ثم نزل الجزء الثاني واقسمه على الجذر الذي اخذته بعد ترفيقه الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر المطلوب بواحد واضربه في دليل الجذر المطلوب فيكون الخارج الجزء الثاني من الجذر. ثم ورق الجزء من الجذر الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحها من الكمية الاصلية واقسم كما تقدم. وهذه صورة العمل

ما هو الجذر الكمي من

$$٢٣ + ٣ت - ٤ت١١ + ٦ت٢ + ١٢ت٣ - ٨(ت٤ + ت) - ٢ت٦$$

$$٢٣ - ٣ت - ٤ت١١ + ٦ت٢ + ١٢ت٣ - ٨(ت٤ + ت) - ٢ت٦$$

$$٢٣ + ٣ت + ٤ت١١ + ٦ت٢ + ١٢ت٣ - ٨(ت٤ + ت) - ٢ت٦$$

$$٢٣ - ٣ت - ٤ت١١ + ٦ت٢ + ١٢ت٣ - ٨(ت٤ + ت) - ٢ت٦$$

$$٢٣ + ٣ت - ٤ت١١ - ٦ت٢ + ١٢ت٣ - ٨(ت٤ + ت) - ٢ت٦$$

لا يحتاج الى ازال اكثر من جزء واحد من الجذر لان القسمة تجري على جزء واحد

منه فقط

٢ ما هو الجذر الرابع من

$$٢٣ + ٨ت + ٢٤ت٢ + ٢٣ت٣ + ١٦ت٤ + ٢(ت٥ + ت٦)$$

$$٢٣ + ٨ت + ٢٤ت٢ + ٢٣ت٣ + ١٦ت٤ + ٢(ت٥ + ت٦)$$

$$٢٣ + ٨ت + ٢٤ت٢ + ٢٣ت٣ + ١٦ت٤ + ٢(ت٥ + ت٦)$$



- ٣ ما هو الجذر المالي من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ت  
الجواب  $٢ - ٢ + ٢$  ت  
٤ ما هو الجذر المالي من  $٢ + ٢ + ٢ + ٢ - ٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ت  
الجواب  $٢ + ٢ - ٢$  ت

يسهل العمل احياناً بجل دليل الجذر الى جزئين

$$٢٢ = ٢ + ٢٠ \text{ وت } ٢٢ = ٢ + ٢٠$$

اي ان الجذر الرابع = الجذر المالي من الجذر المالي

والجذر السادس = الجذر المالي من الجذر الكهي

والجذر الثامن = الجذر المالي من الجذر الرابع

- ١ ما هو الجذر المالي من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك  
٢ ما هو الجذر الكهي من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك  
 $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك

- ٣ ما هو الجذر المالي من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك  
٤ ما هو الجذر الرابع من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك  
ت  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك

- ٥ ما هو الجذر الخامس من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك  
٦ ما هو الجذر السادس من  $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك  
 $٢ - ٢ + ٢ - ٢ + ٢$  ك

في جذور كميات ثنائية صاه

١٤٥ تلزم احياناً الدلالة على الجذر المالي من كمية على صورة  $٢ + ٢ - ٢$  التي  
تسمى ثنائية او فضلية صاه بواسطة مجتمع اخرين صاهين او فضلنها ونستدل على عبارة  
جبرية لهذه الدلالة من هذه القضايا الثلاث

الاولى ان جذر صحيح لا يمكن ان يتركب من جزئين احدهما منطقي والاخر صم  
فان كان ممكناً فلنفرض

$$٢ = ٢ + ٢ \text{ فينريغ الجانبين نصير}$$

$$٢ = ٢ + ٢ \text{ ك } ٢ + ٢$$

وبالتحويل  $٢ = ٢ - ٢$  وفي منطقة وذاك خلاف المفروض

الثانية انه في كل معادلة على صورة  $ك + م = ت + ب$  تكون الاجزاء المنطقية على الجانين متساوية والصاه كذلك فان لم تكن  $ك = ت$  لنفرض  $ك = ت + ل$

ثم بالتعويض  $ت + ل + م = ت + ب$  وبالمقابلة  $ل + م = ب$  اي يكون  $ب$  مركبا من جزءين احدهما منطقي والاخر اضم وقد تبين ان ذلك لا يمكن وهكذا يبرهن انه في المعادلة  $ك - م = ت - ب$  تكون الاجزاء المنطقية على الجانين متساوية والصاه كذلك

الثالثة اذا فرض  $م + ب = ك + م$  يكون  $م - ب = ك - م$  لانه بتربيع الاولى تبصر  $ت + ب = ك + م$  وحسب القضية الثانية  $ت = ك + م$

$$و ب = ك + م$$

$$\text{بالطرح } ت - ب = ك - م$$

$$\text{بالتعويض } م - ب = ك - م$$

١٤٦ ثم لننظر في كيفية استخراج عبارة دالة على جنس كية ثنائية او فضلية صاه

ما سبق

$$\text{ولنفرض } م + ب = ك + م$$

$$\text{اذا } م - ب = ك - م$$

$$\text{بتربيع الجانين فيها لنا } ت + ب = ك + م$$

$$\text{و } ت - ب = ك - م$$

$$\text{بجمعها والقسمة على } ٢ \text{ } ت = ك + م$$

$$\text{بضرب الاولين } م - ب = ك - م$$

$$\text{بجمع مانين } ت + م - ب = ك$$

$$\text{و } ك = \frac{ت + م - ب}{٢}$$

$$\text{ب طرحها } ت - م - ب = ك$$

$$\text{م = } \frac{ت - م - ب}{٢}$$

$$\text{وقد فرض ان } \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{و } \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{اذا } \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ ف } \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{و } \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

ثم بوضع د عوضاً عن  $\sqrt{a-b}$  نصير

$$(1) \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ ف } \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$(2) \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ ف } \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

مثال اول ما هو الجذر الممالي من  $\sqrt{2} + 3$

$$\text{هنا } 2 = 3 \text{ ف } 1 = \sqrt{2} \text{ ف } 8 = 3 \text{ ف } 1 = 3 - 2 = 1$$

$$1 = 8$$

$$\text{اذا } 1 + \sqrt{2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \text{ ف } \sqrt{2} + 3 = \sqrt{11} \text{ ف } \sqrt{2} + 3 = \sqrt{11}$$

$$2 \text{ ما هو الجذر الممالي من } \sqrt{2} + 11 \text{ ف } \sqrt{2} + 11 = \sqrt{121} \text{ ف } \sqrt{2} + 11 = \sqrt{121}$$

$$3 \text{ ما هو الجذر الممالي من } \sqrt{2} - 6 \text{ ف } \sqrt{2} - 6 = \sqrt{36} \text{ ف } \sqrt{2} - 6 = \sqrt{36}$$

$$4 \text{ ما هو الجذر الممالي من } \sqrt{2} + 7 \text{ ف } \sqrt{2} + 7 = \sqrt{49} \text{ ف } \sqrt{2} + 7 = \sqrt{49}$$

$$5 \text{ ما هو الجذر الممالي من } \sqrt{2} - 7 \text{ ف } \sqrt{2} - 7 = \sqrt{49} \text{ ف } \sqrt{2} - 7 = \sqrt{49}$$

في استخراج جنور الاعداد

الاعداد الطبيعية الى عشرة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

مربعاتها ١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ ٣٦ ٤٩ ٦٤ ٨١ ١٠٠

مربع عدد ذي منزلة واحدة لا يكون فيه منزلة اعلى من منزلة العشرات فاذا طلب جنر عدد دون المئة فانظر الى صف المربعات والعدد فوقه هو جنره وان وقع العدد المطلوب جنره بين عددين من اعداد صف المربعات يكون جنره ما بين العددين اللذين فوقها . مثاله لو قيل ما هو جنر ٥٥ لقل ٥٥ واقع بين ٤٩ و ٦٤ فيكون جنره ما بين ٧ و ٨ اي اكثر من ٧ واقل من ٨ و ٩١ واقع بين ٨١ و ١٠٠ و جنره اكثر من ٩ واقل من ١٠

ثم لنجعل الآحاد في الصف الأول عشرات بوضع صفر عن يمينها تصير

١٠٠ ٩٠ ٨٠ ٧٠ ٦٠ ٥٠ ٤٠ ٣٠ ٢٠ ١٠

والربعات ١٠٠٠ ٨١٠٠ ٦٤٠٠ ٤٩٠٠ ٣٦٠٠ ٢٥٠٠ ١٦٠٠ ٩٠٠ ٤٠٠ ١٠٠

فترى ان مربع عدد ذي متثلين لا يكون منازلة دون متثلة المئات. ولنا ان  
نحسب كل عدد مركباً من مجموع آحاده مع عشراته فان فرضنا عدداً ن وعشرات

$$١ \text{ وآحاده } ب \text{ لنا } ن = ١ + ب$$

$$\text{بالتريع } ن^٢ = ١^٢ + ٢١ + ب^٢$$

اي مربع عدد يعدل مربع عشراته مع مضاعف حاصل العشرات في الآحاد  
مع مربع الآحاد

$$\text{مثالة } ٧٨ = ٧٠ + ٨$$

$$\text{و } ٧٨^٢ = (٧٠)^٢ + ٨ \times ٧٠ \times ٢ + (٨)^٢ = ٤٩٠٠ + ١١٢٠ + ٦٤ = ٦٠٨٤$$

ثم نستخرج جذر ٦٠٨٤

هذا العدد أكثر من متثلين فيكون جذره أكثر من متثلة واحدة ولكن  
دون منازل ١٠٠٠ الذي هو مربع ١٠٠ فيكون في الجذر متثلين فقط اي آحاد  
وعشرات

$$٦٠٨٤$$

فربع العشرات يكون في المتثلين عن اليسار ولنفصلها بوضع نقطة فوق الآحاد  
ثم فوق المئات وهذه الاقسام المركبة من متثلين متثلين سميت محطات فالحطة ٦٠  
واقعة بين المربعين ٤٩ و ٦٤ فيكون ٧ الجذر المطلوب مع بعض الآحاد فلنضع ٧  
عن يمين العدد المطلوب جذره وإطرح مربعه

$$٦٠٨٤ / ٧٨$$

$$٤٩$$

$$٧ + ٢ = ١٤٨ | ١١٨٤$$

$$١١٨٤$$

٤٩ من ٦٠ فيبقى ١١ وننزل الحطة الأخرى

فيصير ١١٨٤ وهو مضاعف حاصل العشرات

في الآحاد مع مربع الآحاد كما تقدم ولكن

إذا ضرب عشرات في آحاد لا يكون الحاصل

دون العشرات فالامر ظاهر ان المتثلة الأولى

٤ لا يكون جزءاً من حاصل الآحاد في العشرات فلا بد ان يوجد ذلك الحاصل في

١١٨ فلنضاعف العشرات اي ٢ × ١٤ = ٢٨ ونقسم ١١٨ على ٢٨ فيخرج ٨ فهو عدد

آحاد الجذر او عدد أكبر من الجذر وهذا الخارج لا يمكن ان يكون أصغر من اللازم لانه



على الأقل يعدل مضاعف حاصل العشرات في الآحاد ولكنه قد يكون أكبر من اللازم ولاستعلام ذلك ضع ٨ عن يمين ١٤ وعن يمين ٧ في الخارج ثم بالضرب لنا (١) مربع الآحاد (٢) مضاعف حاصل العشرات في الآحاد وبالطرح لا يبقى شيء فيكون ٧٨ الجذر المطلوب . وفي هذه المعاملة طارحنا من العدد المفروض ٦٠٨٤

(١) مربع ٧ عشرات أي مربع ٧٠

(٢) مضاعف حاصل ٨ × ٧٠

(٣) مربع ٨ وهذه الأجزاء الثلاثة التي تألف منها مربع ٧٨ وعلى هذه الكيفية

نستخرج مربع ٥٦٨٢١٤٤٤

$$\begin{array}{r}
 ٥٦٨٢١٤٤٤ \overline{) ٧٥٣٨} \\
 ٤٩ \\
 ١٤٥ \overline{) ٧٨٢} \\
 \underline{٧٢٥} \\
 ١٥٠٩ \overline{) ٥٧١٤} \\
 \underline{٤٥٠٩} \\
 ١٥٠٦٨ \overline{) ١٢٠٥٤٤} \\
 \underline{١٢٠٥٤٤} \\
 \dots\dots
 \end{array}$$

فلما ما تقدم هذه القاعدة لاستخراج جذور الأعداد المربعة

(١) أقسم العدد إلى محطات في كل محطة منزلتين بوضع نقطة

فوق منزلة الآحاد أولاً ثم المئات الخ وربما تكون في المحطة عن اليسار منزلة واحدة فقط

(٢) استعلم المربع الأكبر التام في المحطة عن اليسار واكتب جذره

في الخارج كما في القسمة واطرح مربعة من المحطة الأولى وإلى الباقي نزل المحطة التالية فذلك مقسوم ثان

(٣) ضاعف الجذر الذي وجدته وضعه عن يسار المقسوم في

موضع المقسوم عليه في القسمة وانظر كم مرة يدخل في المقسوم بعد قطع الرقم الأول منه عن اليمين واكتب في الخارج عن يمين المقسوم عليه ايضاً

(٤) اضرب هذا المقسوم عليه كله في الرقم الاخير من الخارج واطرح الحاصل من المقسوم ونزل الى الباقي المحطة التالية فهو مقسوم ثالث

(٥) ضاعف الجذر الموجود واجعله مقسوماً عليه وافعل كما تقدم الى ان تبقى كل المحطات

ان لم تبقى بقية بعد تنزيل المحطة الاخيرة والطرح من المقسوم الاخير يكون العدد مربعاً تاماً وان بقيت بقية فهو غير تام فلو قيل ما هو جذر ١٦٨ ل قيل ١٢ للربع التام منه والباقي ٢٤ اي ١٦٨ ليس مربعاً تاماً وان قيل من اين علمت ان ١٢ هو جذر اكبر مربع في ١٦٨ قلت لان فضلة مربعي عددين متوالين يعدل مضاعف اصغر العددين + ١

لنفرض ١ = اصغرها

١ + ١ = اكبرها

$$1 + 1 + 1 = (1 + 1) \cdot$$

$$1 = 1$$

$$1 + 1 \quad \text{الفضلة}$$

فالجذر لا يزيد واحداً ان لم تكن الفضلة مضاعف ذلك الجذر مع ١ او اكثر و  $1 + 2 \times 12 = 25$  والفضلة ٢٤ فلا يمكن ان يكون الجذر الصحيح اكثر من ١٢ وهذه القاعدة تنفذ في استعمال مربعات اعتاد متواليه بطريقة اسهل من ضربها في نفسها

مثاله لنا  $(601)^2 = 361201$  مطلوب مربع ٦٥٢ فهذه صورة العمل

$$٤٢٢٨٠١ = (٦٥١)^2$$

$$١٢٠٢ = ٦٥١ \times ٢ +$$

$$١ = ١ +$$

$$(٦٥٢)^2 = ٤٢٥١٠٤$$

$$١٢٠٤ = ٦٥٢ \times ٢ +$$

$$١ = ١ +$$

$$(٦٥٣)^2 = ٤٢٦٤٠٩$$

فيه عدة المنازل في الجذر تعدل عدة المحطات في الجذور ابداً

امثلة

(١) ما هو جذر ١٧٦٨٩

(٢) ما هو جذر ٧٢٢٥

(٣) ما هو جذر ٨٥٦٧٨٩٧٣

(٤) ما هو جذر ٩٩٤٠٠٩

(٥) ما هو جذر ٢٧٩٢٤٠١

(٦) ما هو جذر ٦٧٨١٢٦٧٥

(٧) ما هو جذر ٩١٨٧٤١٦٧٣٧٠٤

(٨) ما هو جذر ٢٦٦١٠٩٧٠٤٩

لاجل استخراج جذر كسر استخراج جذر الصورة ثم جذر المخرج او حوله الى كسر عشري واقسم الكسور الى محطات مبتدئا من منزلة العشرات واجر العمل حتى يخرج الجذر او يقرب اليه بما يكفي . واذا كان المربع صحيحاً ولكنه ليس مربعاً تاماً فاضف اليه اصفاراً بمنزلة كسر عشري . مثالة لو قيل استخراج جذر ٧ بحيث لا يفضل اكثر من  $\frac{1}{100}$

$$٧٠٠ \dots = ٧ \times (١٠٠)$$

$$٧٠٠ \dots \mid ٢٠٦٤$$

٤

$$\begin{array}{r} ٤٦ \overline{) ٢٠٠} \\ \underline{٢٧٦} \\ ٥٢٤ \overline{) ٢٤٠٠} \\ \underline{٢٠٩٦} \end{array}$$

الباقى ٣٠٤

ضع اربعة اصفار عن يمين السبعة واقسمها الى محطات مبتدئا من منزلة العشرات واجر العمل كما تقدم فالجواب ٢٠٦٤ وذلك يفرق عن جذر ٧ باقل من  $\frac{1}{100}$  لانه لا يفضل ان توضع ٥ عوضاً عن ٤ في الجواب

- (٢) ما هو جذر  $\sqrt{29}$  الى اقل من  $\frac{1}{100}$  الجواب  $٥.٢٨$   
 (٣) ما هو جذر  $\sqrt{237}$  الى اقل من  $\frac{1}{1000}$  الجواب  $١٥.٠٦٦٥$   
 تنبيه . عدة الاضمار المضافة الى الجذور في مضاعف عدة المنازل في كسور الجواب  
 ما تقدم توضع طريقة مختصرة لاستخراج جذر عدد مخلوط . مثاله لو قيل ما هو جذر  
 $٢٤٢٥$  ل قيل منا العدد المخلوط  $\frac{2425}{1000} = ٢.٤٢٥$  اما  $١٠٠٠$  فليس بربع تام ولكنه يُجَمَّل  
 تاماً بضرب الصورة والمخرج في  $١٠$  فيصير  $\frac{24250}{10000} = ٢.٤٢٥٠$  وجذر الصورة الى اقرب  
 صحيح  $= ١٨٥$  اي  $\frac{185}{100} = ١.٨٥$  ولجل زيادة التدقيق اضف الى المخرج اضعافاً  
 تعادل عدة منازل الكسور المطلوبة في الجواب

### امثلة

- (١) ما هو جذر  $\sqrt{2371.٢٤٧٠٧}$  الى اقل من  $٠.٠١$   
 (٢) ما هو جذر  $\sqrt{237.٣٧}$  الى اقل من  $٠.٠١$   
 (٣) ما هو جذر  $\sqrt{2.١٠٠١}$  الى اقل من  $٠.٠٠٠٠١$

### في استخراج جذور الاعداد المكعبة

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \quad \text{مكعب} \\ 100 &= 10 \quad \text{"} \\ 1000 &= 100 \quad \text{"} \\ 1000000 &= 1000 \quad \text{"} \end{aligned}$$

اي الجذر المكعب لعدد ذي منازل بين منزلة واحدة وثلاث منازل في رقم واحد اي  
 منزلة واحدة ولعدد منازل بين ٤ و ٦ في جذره الكمي رقان اي منزلتان ولعدد منازل  
 بين ٧ و ٩ في جذره الكمي ثلاثة ارقام الخ او اذا وضعنا الاعداد الطبيعية كما عملنا في  
 ابضاج كنية استخراج الجذر المال فلنا

جذور ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠  
 مكوب ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ ٢١٦ ٣٤٣ ٥١٢ ٧٢٩ ١٠٠٠  
 فلو طلب جذر المكعب لعدد اقل من ١٠٠٠ انظرت الى صف المكوب فلا بد

ان يكون الجذر فوق احدهما او بين اثنين من صف الجذور وان كان العدد اكثر من ١٠٠٠ يكون جذره المكعب اكثر من ١٠ اي يكون فيه آحاد معلومة وعشرات معلومة

لنفرض العدد ن ولنفرض عشرات = ١ وآحاده = ب فلنا  
 $n = 10b + 1$  ون  $10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot b + 3 \cdot 10 \cdot b^2 + b^3$

اي مكعب عدد يعدل مكعب عشرات مع ثلاثة امثال الحاصل من ضرب مربع عشرات في آحاده مع ثلاثة امثال حاصل عشرات في مربع آحاده مع مكعب آحاده  
 مثالة

$$104824 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \cdot 7^2 + 7^3 = 10^3 + 4200 + 1470 + 343$$

فلتمكس العمل ولستخرج كعب

$$\begin{array}{r} 104824 \\ 1000 \end{array}$$

٨

$$\begin{array}{r} 104824 \\ 1000 \\ \hline 4824 \\ 300 \cdot 8 = 2400 \\ \hline 424 \\ 30 \cdot 8 \cdot 8 = 1920 \\ \hline 32 \\ 3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 1536 \\ \hline 16 \end{array}$$

فلنا هذه القاعدة لاستخراج جذر مكعب

- (١) قطع العدد محطات في كل محطة ثلاثة ارقام مبتدئاً من اليمين وربما تكون المحطة الاخيرة عن اليسار اقل من ثلاثة ارقام
- (٢) استعلم المكعب الاكبر في المحطة الاولى عن اليسار واكتب في الخارج كما في القسمة واطرح مكعبه من المحطة ونزل محطة ثانية لاجل مقسوم ثان

- (٣) ضع صفراً عن يمين الجذر الذي وجدته واضرب مربعه في ٢ واجعل الحاصل مقسوماً عليه وانظر كم مرة يدخل في المقسوم الثاني

وأكتب ذلك في الخارج عن يمين الرقم الأول: رُبْع الرقم الأخير واضرب  
بالمربع الرقم الأول بعد وضع صفر عن يمينه ثم رُبْع الرقم أيضاً واجمع  
الحواصل الثلاثة فان دخل في المقسوم بما يماثل الرقم الأخير كان والآ  
فنقص ذلك الرقم واحداً

(٤) اضرب المقسوم عليه الذي وجدته في الرقم الأخير من الجذر  
واطرح الحاصل من المقسوم والى الباقي نزل المحطة الثالثة لاجل مقسوم  
ثالث

(٥) اضرب مربع كل الجذر الذي وجدته في ٢٠٠ لاجل مقسوم  
عليه ثالث وانحن كما تقدم كم مرة يدخل في المقسوم وهكذا الى النهاية

### امثلة

الجواب ٢٦٤	$\begin{array}{r} ٤٨٢٢٨٥٤٤ \\ \hline \end{array}$
الجواب ٧٨ والباقي ٨٦٩٧	$\begin{array}{r} ٤٨٢٢٤٩ \\ \hline \end{array}$
الجواب ٢٢٠٦٨	$\begin{array}{r} ٢٢٩٧٣٤٠٢١٨٤٢٢ \\ \hline \end{array}$
ما هو ١١	ما هو ٤

في استخراج اي جنر فريض لعدد مفروض

لنفرض ن عدداً ولنفرض عشرات ١ = آحاده = ب فلنا

$$ن = (١ + ب) = ١ + ن١ + ن٢ + ن٣ + \dots + ن٢ + ن١ + ن٢ + ن٣ + \dots + ن٢ + ن١ + ن٢ + \dots$$

في كيفية بسط كمية ثنائية

اي العدد المفروض يعدل قوة ن لعشرات + ن مرة حاصل القوة ن - ١

للعشرات في الآحاد + الخ

فلنا هذه القاعدة لاستخراج الجذر النوني لاية كميت فريضت

(١) قطع العدد محطات ارقامها تعادل الآحاد في دليل الجذر

المطلوب واستعلم اكبر جذر في المحطة الاولى من اسم الدليل المفروض

(٢) رَقِّ ذلك الجذر الى القوة المفروضة واطرح الحاصل من المطة الاولى ونزل الرقم الاول من المطة الثانية واجعل الكل مقسوماً ثانياً  
(٣) رَقِّ الجذر الذي وجدته الى قوة ن - ١ واضربها في ن وانظر كم مرة تدخل في المقسوم الثاني واكتب ذلك في الخارج  
(٤) رَقِّ العدد الذي في الخارج كله الى قوة ن واطرح الحاصل من المخطئين عن اليسار وافعل كما تقدم الى النهاية

مثاله لو قيل ما هو الجذر الرابع من ٥٣١٤٤١

$$٥٣١٤٤١ \mid ٢٧$$

$$\begin{array}{r} ٢ \\ ٤ \times ٢ = ٨ \\ \hline ٥٣١٤٤١ \end{array}$$

(٢) ما هو الجذر الخامس من ٢٣٥٥٤٤٣٢

$$٢٣٥٥٤٤٣٢ \mid ٢٢$$

$$\begin{array}{r} ٢ \\ ٥ \times ٢ = ١٠ \\ \hline ٢٣٥٥٤٤٣٢ \end{array}$$

اذا كانت دليل الجذر المطلوب عدداً مضاعفاً يستخرج الجذر باستخراج الجذر المدلول عليه بالضلع الاول ثم المدلول عليه بالآخر. مثاله لو قيل ما هو الجذر الثامن  
ثم  $\times$  ثمانية فاستخرج اولاً الجذر المكسب ثم الجذر الرابع. والجذر الرابع يستخرج باستخراج الجذر المربع ثم جذر ذلك الجذر المربع والجذر السادس يستخرج باستخراج الجذر المكسب ثم الجذر المربع والجذر الثامن يستخرج باستخراج الجذر المربع ثلاث مرات متتابعة اي  $\sqrt[8]{\text{ب}} = \sqrt[4]{\text{ب}} = \sqrt[2]{\text{ب}}$  والجذر السادس عشر يستخرج باستخراج الجذر المربع اربع مرات متتابعة

## الفصل الثالث عشر

في حل المعادلات بالترقية والتجذير

### نبذة في الترقية

١٤٧ لو فرض  $\sqrt{ك} = ت$  لكان بتربيع جانبي هذه المعادلة  $ك = ت^2$  أي ان وقعت الكمية المجهولة تحت علامة الجذر نحل المعادلة بترقية جانبيها الى فوق من اسم ذلك الجذر

تنبيه . قبل الترقية ينبغي مقابلة المعادلة حتى تكون الكميات المطلقة وجنعا على جانب واحد والجذرية وجنعا على الجانب الآخر

$\sqrt{ك} = ٤ + ٢$	فلنفرض هذه المعادلة
$\sqrt{ك} = ٤ - ٢$	ثم بالمقابلة
$ك = ٢٥ - ٢٥$	بترقية الجانبيين
$ت + \sqrt{ك} = ب - د$	مفروض
$\sqrt{ك} = د + ب - ت$	بالمقابلة
$ك = (د + ب - ت)^2$	بالترقية
$\sqrt{ك} = ١ + ٤$	مفروض
$ك = ١ + ٦٤$	بترقية الجانبيين الى القوة الثالثة
$ك = ٦٥$	وبالمقابلة
$\sqrt{٢٤ + ٤} = ٤ - \sqrt{١}$	مفروض
$\sqrt{١٢} = ٤ - \sqrt{ك}$	بالتجذير
$\sqrt{١} = ٤ - \sqrt{ك}$	بالمقابلة والقسمة على ٦
$ك = ٤ - \frac{٢٥}{٣٦}$	بالترقية
$ك = ٤ + \frac{٢٥}{٣٦}$	مفروض



بالمجبر  $ت + \sqrt{ك} = ٢ + د$   
 بالمقابل  $\sqrt{ك} = ٢ + د - ت$   
 بالترقية  $ك = (٢ + د - ت)^٢$

وعلى هذا النسق نحل هذه الامثلة الآتية

$$\sqrt{٢٦١} = ك \quad ٢ + \sqrt{ك} = \frac{٤}{٥} - ٦$$

$$\sqrt{٢٠} = ك \quad ٨ = \sqrt{\frac{ك}{٥}}$$

$$\sqrt{١٢} = ك \quad ٧ = ٤ + \sqrt{٢ + ك}$$

$$\sqrt{٤} = ك \quad \sqrt{ك} = \sqrt{١٢ + ك}$$

$$\sqrt{\frac{٢٥}{١٦}} = ك \quad \sqrt{ك} - \sqrt{٢} = \frac{١}{٢} - \sqrt{ك}$$

$$\sqrt{\frac{٩}{٢٠}} = ك \quad \sqrt{٥ + ك} + ٢ = \sqrt{٢ + ك} \times \sqrt{٥ + ك}$$

$$\sqrt{\frac{١}{١-ت}} = ك \quad \frac{ك-ت}{ك} = \frac{ك}{ك}$$

$$\sqrt{٤} = ك \quad \frac{٢٨ + \sqrt{ك}}{٦ + \sqrt{ك}} = \frac{٢٨ + \sqrt{ك}}{٤ + \sqrt{ك}}$$

$$\sqrt{\frac{١}{٢}} = ك \quad \frac{٢}{\sqrt{ك} + \sqrt{٢}} = \sqrt{ك} + \sqrt{٢}$$

$$\sqrt{\frac{٢}{٢}} = ك \quad \frac{٢}{\sqrt{ك}} = \sqrt{ك} + \sqrt{٢}$$

$$\sqrt{\frac{٢-٤}{٤}} = ك \quad \frac{٢}{\sqrt{ك}} = \sqrt{ك} + \sqrt{٢}$$

$$\sqrt{٢} = ك \quad \frac{٤}{\sqrt{ك} + \sqrt{٢}} = \sqrt{ك} + \sqrt{٢}$$

$$\sqrt{٨١} = ك \quad \sqrt{ك} - ١٦ = \sqrt{٢٢ - ك}$$

$$\sqrt{١٦} = ك \quad ١ + \sqrt{ك} = \sqrt{١٧ + ك}$$

$$\sqrt{٦} = ك \quad \frac{١ - \sqrt{٦}}{٦ + \sqrt{٦}} = \frac{٢ - \sqrt{٦}}{٢ + \sqrt{٦}}$$

$$\sqrt{\frac{١-٢}{٢}} = ك \quad \frac{١}{\sqrt{ك}} = \sqrt{ك} + \sqrt{٢}$$

نبذة

في حل المعادلات بالتجذير

١٤٨ لو فرض  $ك = ١٦$  فان تجذر الجانبان نصير  $ك = ٤$

اي ان كانت الكمية المجهولة قوة تغل المعادلة بتجذير الجانبيين

(١) مفروض  $ك + ٦ = ٨ - ك$

بالمقابلة  $ك = ١$  وبالتجذير  $ك = ١$

فالجواب مكتسب لان  $١ = ٢ + ٨ - ٢ = ٨ - ٢ = ٦$

مفروض  $٥ = ٣٠ - ك$

بالمقابلة والقسمة  $ك = ١٦$

بالتجذير  $ك = ٤$

(٢) مفروض  $ت + ك = ح - ك$

بالتجذير والمقابلة والقسمة  $ك = ١$

وبالتجذير  $ك = ١$

مفروض  $ت + د = ١٠ - ك$

بالمقابلة والقسمة  $ك = ١$

بالتجذير  $ك = ١$

١٤٩ متى كانت المجهولة قوة تحت علامة الجذر تغل المعادلة بالترقية والتجذير

(٣) مفروض  $٤ = ك$

بالترقية  $ك = ١٤$

بالتجذير  $ك = ٨$

(٤) مفروض  $ك - ح = ح - د$

بالترقية  $ك - ح = ح - د$

بالمقابلة  $ك = ح$

بالتجذير  $ك = ح$

(٥) مفروض  $ك = ١$



بالتحويل النسبة الى معادلة ه ك = ٨٠٠٠٠٠

بالقسمة ك = ١٦٠٠٠٠ بالتعذيب ك = ٤٠٠ +

نتيجه . عند تعذيب ١٦٠٠٠٠ لا نعلم هل الجذر ايجائي ام سلمي ولكن حسب شروط المسئلة كان رجحا فحسبه ايجائيا . وقس على ذلك نظيرة

(١) سئل كم ميلا الى المكان الثلاثي . فأجيب انه اذا طُرِح ٩٦ من مربع البعد يبقى ٤٨ فكم كانت المسافة

بالشروط ك = ٩٦ - ٤٨ = ك = ١٤٤ ك = ١٢

(٥) اي عدد يضم ثلاثة امثال مربعه على ٤ ويطرح ١٢ من الخارج فيبقى ١٨٠

بالشروط  $\frac{٢}{٤} ك = ١٢ - ١٨٠ = ك = ١٦$

(٦) اي عدد يُطرح ربع مربعه من ٨ فيبقى ٤ الجواب ٤

(٧) اي عدد ين نسبة مجتمعا الى اكبرها كسبة ١٠ الى ٧ واذا ضُرب مجتمعا

في اصغرها كان الحاصل ٢٧٠

لفرض مجتمعا = ١٠ ك فيكون الاكبر ٧ ك والاصغر ٢ ك والعددان ٢١ و ٦

(٨) اي عدد ين نسبة فضلها الى اكبرها كسبة ٩:٢ وفضلها مربعها ١٢٨

الجواب ١٨ و ١٤

(٩) اقس ١٨ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر كسبة

١٦:٢٥

ليكن ك الاكبر فيكون ١٨ - ك الاصغر وك : (١٨ - ك) = ١٦:٢٥

وبالتحويل الى معادلة ١٦ ك = ٢٥ (١٨ - ك)

وبالتعذيب ٤ ك = ٥ (١٨ - ك) ١٠ = ك

(١٠) اي عدد يُضرب نصفه في ثلثه فيكون الحاصل ٢٤ الجواب ١٢

(١١) اي عدد اذا أُضيف اليه وطُرِح منه ٥ وضُرب المجمع في الفضلة يكون

الحاصل ٩٦ الجواب ١١

(١٢) اقس ١٤ الى قسمين بحيث تكون نسبة الخارج من قسمة اكبرها على اصغرها

الى الخارج من قسمة اصغرها على اكبرها كسبة ١٦:٩ الجواب ٨ و ٦

(١٣) اي عدد ين نسبة احدهما الى الآخر كسبة ٤:٥ ومجموع كليهما ٥١٠٢

افرض الاكبر ه ك والاصغر ٤ ك . فيكون الجواب ١٥ و ١٢

(١٤) ثلاثة شركاء قسموا ارباعهم فكان الخارج من قسمة حصة الاول على ٧ بمائل الخارج من قسمة حصة الثاني على ٣ والخارج من قسمة حصة الثاني على ١٧ بمائل الخارج من قسمة حصة الثالث على ٥ وان ضربت حصة الاول في حصة الثاني وحصة الثاني في حصة الثالث وحصة الثالث في حصة الاول يكون مجموع الحواصل  $\frac{2}{3} \times 2830$  فكم حصة كل واحد

$$\text{نفرض حصة الاول ك فلنا } ٣:٧:: ك: \frac{2}{3} = \text{حصة الثاني و } ٥:١٧:: \frac{2}{3}: \frac{2}{3} \times \frac{10}{119} = \text{حصة الثالث}$$

$$\text{والاول في الثاني اي } ك \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$\text{والثاني في الثالث اي } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{10}{119}$$

$$\text{والثالث في الاول اي } ك \times \frac{10}{119} = \frac{2}{3} \times \frac{10}{119}$$

$$\text{ثم بالتحويل الى مخرج مشترك والمجموع} = \frac{2}{3} \times \frac{10}{119}$$

$$\text{فلنا } \frac{2}{3} \times \frac{10}{119} = 2830 \times \frac{2}{3} = ك = 79 \frac{1}{2}$$

$$\text{فالاول} = 79 \frac{1}{2} \text{ والثاني} = 24 \text{ والثالث} = 10$$

(١٥) بعض التجار اشتركوا في ارسال عامل الى مصر واعطاه كل واحد منهم من الدنانير عشرة امثال عدد الشركاء. وكانت عمالة العامل في المئة من الدنانير ضعف عدد الشركاء. فان ضرب  $\frac{1}{100}$  من ربحي في  $\frac{2}{3}$  بمائل الحاصل عدد الشركاء فكم كانت الشركاء

$$\text{ليكن عدد الشركاء ك فيكون المال الذي يده العامل } ١٠ ك \text{ ورجح العامل على كل } ١٠٠ \text{ دينار} = ٢ ك \text{ وعلى } ١٠ ك \text{ يكون ربحه } \frac{2}{3} \text{ ويكون } \frac{1}{100} \text{ من هذا الربح}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$\text{فلنا } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 225 ك = 225 ك = 225 ك = 10$$

(١٦) اي عدد اذا اضيف اليه ٢٠ وطرح منه ١٠ يكون مربع المجمع مع مضاعف مربع الفضلة ١٧٤٧٥

(١٧) اي عدد ينسب احدهما الى الآخر كنسبة ٥:٣ ومجموع مربعيهما ١٦٦٦

الجواب ٢١ و ٢٥

(١٨) سافر زيد وعمرو كل واحد من بلد قاصدين ان يتلاقيا في مكان. ولما التقيا كان زيد قد قطع من المسافة ١٨ ميلاً زيادة عن عمرو. وفي سبيلها كان زيد

قد قطع مسافة عمرو في  $\frac{1}{4}$  يوم. وكان عمرو قد قطع مسافة زيد في ٢٨ يوماً.  
فكم كان البعد بين البلدين

لنفرض ك = المسافة التي قطعها زيد

وك = ١٨ = التي قطعها عمرو

فيكون  $\frac{ك}{١٨} = \frac{١٨ - ك}{١٥٤}$  = سفر زيد اليومي

و  $\frac{ك}{٢٨} =$  سفر عمرو اليومي

ولنا ك = ١٨ =  $\frac{ك}{١٨} : \frac{١٨ - ك}{١٥٤} = \frac{ك}{٢٨}$

ك = ٧٢ = مسافة زيد. والبعد = ١٢٦ ميلاً

(١١) أي عددان نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ٨ : ٥ وحاصلها ٢٦٠

الجواب ٢٤ و ١٥

(٢٠) رجل اشترى ثوبين مجتمعهما ٢٦ ذراعاً. وكان ثمن الذراع من كل واحد من الدراهم بقدر عدد أذرعهِ. ونسبة ثمن الواحد إلى ثمن الآخر : ١ : ٤ فكم ذراعاً كان كل ثوب

الجواب ٢٤ و ١٢

(٢١) أي عددان نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ٣ : ٢ ونسبة فضلة قوتيهما الرابعتين

إلى مجنوع كميهما كنسبة ٢٦ : ٧

(٢٢) بعض السياج ترافقوا في السفر. ومع كل واحد منهم قدر ما مع الآخر من الدراهم ولكل واحد من الخدّام انفاق بقدر عدد السياج. والدراهم التي مع كل واحد من السياج مضاعف عدد الخدّام ومجموع الكل ٢٤٥٦ درهماً فكم كان عدد السياج

الجواب ١٢

(٢٣) طلب ملك من مقاطعة رجالاً للحرب فأرسلت كل قرية انفاراً بعدد قرى تلك المقاطعة أربع مرات. وأدلم يرض الملك بذلك أرسلت كل قرية ثلاثة انفار أيضاً فكانت نسبة العدد كلّه بعد هذه الزيادة إلى عدد المرسلين أولاً كنسبة ١٧ : ١٦ فكم قرية في تلك المقاطعة

العملية التاسعة السابقة خصوصية فلنجعلها هنا عامة

(٢٤) اقسام كمية ١ إلى قسمين بحيث تكون نسبة مربع أحدهما إلى مربع الآخر

كنسبة ب إلى س

لنفرض ك = قسماً واحداً ١ - ك = القسم الآخر

بشرط المسئلة ك : (١ - ك) :: ب : س

$$س ك = ب (١ - ك)$$

$$س ك = ب + ب ك (١ - ك)$$

$$\text{ايجاباً} \quad ك = \frac{ب}{ب + س} \quad \text{و} \quad ١ - ك = \frac{س}{ب + س}$$

$$\text{سلماً} \quad ك = \frac{ب}{ب - س} \quad \text{و} \quad ١ - ك = \frac{س}{ب - س}$$

اذا كان ب = س يكون القسآن متساويين وكل واحد = ١/٢ اذا اخذنا

$$\frac{ب}{ب - س} = \frac{ب}{ب} = ١ = \frac{س}{س - ب}$$

وذلك عبارة عن غير المتناهي كما ترى في محلواي المخرج موجود في الصورة الى ما لا نهاية وكذلك القسم الثاني اي

$$١ - ك = \frac{س}{ب - س} = \frac{س}{س - ب}$$

وذلك ايضا عبارة عما لا نهاية والقسآن

$$١ = \frac{ب}{ب - س} - \frac{ب}{ب - س} = \frac{ب - ب}{ب - س}$$

استعمل هذه العبارة في حل مسائل الفلسفة الطبيعية

من مبادئ الفلسفة الطبيعية ان النور والجاذبية يتلآن بالنسبة الى مربع البعد

اما الجاذبية بين جسمين فهي بالنسبة الى جرمها وبالقلب كمرجع البعد بينها واما

النور فبالنسبة الى جرم النور وبالقلب كمرجع البعد

مسئلة . لنفرض جرم الارض ٧٥ مرة جرم القمر والمسافة بينها ٢٠ مرة قطر

الارض . فلي اي بعد تكون جاذبية الجرم الواحد مثل جاذبية الجرم الآخر

لنفرض جرم القمر = س وجرم الارض = ب والبعد بينها = ١ والبعد عن

مركز الارض المطلوب = ك فيكون القسم الاخر من البعد بينها ١ - ك وبالمسئلة

$$ك : (١ - ك) = ب : س$$

$$\text{وكما تقدم} \quad ك = \frac{ب}{ب + س} \quad ١ - ك = \frac{س}{ب + س}$$

بالمسئلة

$$٣٠ = ا \quad ب = ٧٥ = س = ١$$

$$ك = \frac{٣٠ \sqrt{٧٥}}{١ + \sqrt{٧٥}} = ٢٦٩ \text{ تقريباً} \quad و ا - ك = ٣٩١ \text{ تقريباً} \quad \text{هنا اذا اخذنا}$$

القيمة الايجابية ثم اذا اخذنا القيمة السلبية لنا

$$ك = \frac{ا - ب}{ب - س} \quad و ا - ك = \frac{ا - س}{ب - س}$$

$$ك = \frac{٣٠ \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}} = ٣٣٩ \text{ تقريباً} \quad ا - ك = -٣٩١ \text{ تقريباً}$$

وهذه القيمة السلبية تدل على وجوب اتخاذ البعد الى الجهة المتقابلة للجهة الاولى اي  
انه على مسافة ابعد من القمر عن الارض بما يماثل ٣٩١ قطر الارض تكون جاذبية  
الارض والقمر لجرم في تلك النقطة متساويتين

مسئلة . على اية مسافة من الارض تكون جاذبية الارض ١٦ مرة جاذبية القمر

$$\text{جاذبية الارض } \frac{ب}{ا} \text{ وجاذبية القمر في تلك النقطة } = \frac{س}{(ا - ١)}$$

$$\text{بالمسئلة } \frac{ب}{ا} = \frac{١٦}{(ا - ١)}$$

$$\text{بالتجذير } \frac{ب}{س} = \frac{٤}{ا - ١}$$

$$\text{بالمجبر } ا - ب = ك = ٤ س = ٤$$

$$\text{بالقيمة الايجابية } ك = \frac{ا - ب}{ب + س} = ٢٠٥ \text{ تقريباً}$$

$$\text{بالقيمة السلبية } ك = \frac{ا - ب}{ب - س} = ٥٥٧ \text{ تقريباً}$$

اي ابعد من القمر عن الارض بما يماثل قطر الارض ٥٥٧ مرة

لاجل كيفية احتساب هذه العبارة لاستعلام نور جرمين النسي انظر اصول المهمة



## الفصل الرابع عشر

في معادلات ممتزجة من الدرجة الثانية

١٥٠ تنقسم المعادلات الى اقسام ثنتي باعتبار قوة الحرف الدال على الكمية

المجهولة

الاول معادلات من الدرجة الاولى وهي ما ليس فيها سوى القوة الاولى من المجهولة. مثالها  $ك = ت + ب$  وتسمى ايضا معادلات بسيطة وقد تقدم ذكرها الثاني معادلات من الدرجة الثانية وهي ما كانت القوة العليا فيها من المجهولة مالا. ويقال لها ايضا معادلات مربعة. فان لم يكن فيها غير تلك القوة من المجهولة فهي المحضة وقد مضى ذكرها. مثالها  $ك^2 = ت - ر$  وان كان فيها القوة الثانية والاولى من المجهولة فهي الممتزجة. مثالها  $ك^2 + ب = ك = د$

الثالث معادلات من الدرجة الثالثة وهي ما كانت فيها القوة العليا من المجهولة ككبا. وهي ايضا اما محضة مثل  $ك^3 = ب - س$  واما ممتزجة مثل  $ك^3 + ت = ك^2 + ب$  وحرف على ذلك معادلات الدرجة الرابعة والخامسة ولم تجرأ

١٥١ قد رأينا في ما تقدم ان المعادلة المربعة المحضة تحل بتقدير جانبيها. ومكنا ايضا الممتزجة اذا كان الجانب الذي فيه المجهولة برعاً تاماً. مثالها

$ك^2 + ت = ك + ب$  فهذه المعادلة تحل بالتقدير لان جانبيها الاول مربع كمي ثنائية. وحسباً تقدم (١٠٣) لنا بالتقدير  $ك + ت = ب + ح$  وبالمقابلته  $ك = ب + ح - ت$

١٥٢ مراراً كثيرة يحدث ان الجانب الذي فيه المجهولة لا يكون مربعاً تاماً مثل  $ك^2 + ت = ك = ب$  فلو عرفنا الجزء الناقص من الجانب الاول لكي يصير مربعاً تاماً واضفناه الى الجانبين لجلنا المعادلة محضة بالتقدير كما تقدم (٧٨) فما ان الجزء الثاني هو مضاعف حاصل الجزئين يكون  $ت = ك$  في المعادلة المذكورة مضاعف حاصل جزوي الكمية التي نحن في طلبها وتكون الكمية  $ك + ت$  ومربعها  $ك^2 + ت = ك + ت$  اي الجزء الناقص هو مربع نصف مسمى القوة الدنيا من

المجهول . ولنا من ذلك قاعدة لاتمام تربيع معادلة مربعة متميزة وفي ان يؤخذ مربع نصف مسمى القوة الدنيا من المجهول ويضاف الى جانبي المعادلة

فلو فرض  $ك^2 + ف ك = د$  لكان لنا حسب تقدم

$$ك^2 + ف ك + \frac{1}{4} ف^2 = د + \frac{1}{4} ف^2$$

$$ك + \frac{1}{2} ف = \sqrt{د + \frac{1}{4} ف^2}$$

$$ك = \sqrt{د + \frac{1}{4} ف^2} - \frac{1}{2} ف$$

وفي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة متميزة . فلو فرض  $ك^2 - ٦ ك = ٧$  لنلنا حسب هذه العبارة  $ك = ٣ \pm \sqrt{٩ + ٧٦} = ٣ \pm ٤ = ٧$  او  $١$

نتيه . لكل معادلة مربعة محضة كانت او متميزة قيمتان لان الجذر الشقي ملتصق (١٠٢) وهذا الجذر هو نفس قيمة المجهول في كل معادلة مربعة محضة . مثالة  $ك^2 - ٦٤ ك = ٦٤$   $ك = ٦٤ \pm \sqrt{٦٤^2 + ٦٤}$  ولكن في المتميزة لابد من اضافة شيء الى هذا الجذر او طرح شيء منه كما رأينا . ونرى القيمتين تارة ايجابيتين وتارة احدهما ايجابية والاخرى سلبية . مثال ذلك

$$ك^2 + ٨ ك = ٢٠ \quad ك = -٤ \pm \sqrt{١٦ - ٢٠} \quad ك = -٨ \text{ او } ١٠$$

$ك = -٤ \pm ٤ = ٠$  او  $٢$  ونعبر عن معتمتها بالتعويض بها عن المجهول في المعادلة الاصلية .

$$\text{فبالتعويض عن } ك \text{ بمجمعة لنا } ٢٠ = ٥ \times ٨ - ٢٠ = ٤٠ - ١٥$$

$$\text{وبالتعويض عنها بثلاثة } ٢ = ٢ \times ٨ - ٢٠ = ١٦ - ٢٠ = -٤$$

١٥٢ قبل اتمام التبريع يجب مقابلة المعادلة حتى تكون المجهولات وحدها على جانب واحد والمعلومات على الجانب الآخر . ويجب ايضا ازالة الكسور والقسمة على مسمى القوة العليا للمجهول . ولا يضاعف كل ذلك قد وضعنا هذه الامثلة

$$(١) \text{ مفروض } ك^2 + ٦ ت ك = ب$$

$$\text{باتمام التبريع } ك^2 + ٦ ت ك + ٩ ت^2 = ب + ٩ ت^2$$

$$\text{بالتجذير } ك + ٣ ت = \sqrt{ب + ٩ ت^2}$$

$$\text{وبالمقابلة } ك = \sqrt{ب + ٩ ت^2} - ٣ ت$$

$$(٢) \text{ مفروض } ك^2 - ٨ ب ك = ح$$

باتمام التريع	ك - ٨ ب + ك ١٦ = ١٦ ب + ح
بالتجذير	ك - ٤ ب = ١٦ ب + ح
بالمقابلة	ك = ٤ ب + ١٦ ب + ح
(٢) مفروض	ك + ث = ك + ح
باتمام التريع	ك + ث + ك = ٤ ب + ح
بالتجذير	ك + ٢ = ٤ ب + ح
وبالمقابلة	ك - ٢ = ٤ ب + ح
(٤) مفروض	ك - ك = ح - د
باتمام التريع	ك - ك + ١/٤ = ١/٤ + ح - د
وبالتجذير والمقابلة	ك = ١/٢ + ١/٤ + ح - د
(٥) مفروض	ك + ٢ = ٢ + د
باتمام التريع	ك + ٢ + ١/٤ = ١/٤ + د + د
وبالتجذير والمقابلة	ك = ٢ - ١/٤ + د + د
(٦) مفروض	ك - ث = ث = ث - ب - س
باتمام التريع	ك - ث + ث = ٤ ب + س
بالتجذير والمقابلة	ك = ٢ + ٤ ب + س
(١) مفروض	ك + ٢ = ٢ + ح
باتمام التريع	ك + ٢ + ٢ = ٢ + ح + ح
وبالتجذير والمقابلة	ك = ٢ - ٢ + ح + ح
(٤) مفروض	ك - ٢ = ٢ - ح
باتمام التريع	ك - ٢ + ١/٤ = ١/٤ - ح
بالتجذير والمقابلة	ك = ٢ - ١/٤ - ح

١٥٤ متى كانت القوة الدنيا في حد من اجزاء المعادلة يجب جمعها الى جزء واحد قبل اتمام التريع . وان كانت مضلعة يجب فكها الى اضلاعها لكي يُعرف مقامها

(١) مفروض  $ك + ٢ + ك + ك + ك = د$

بالمجمع  $ك + ٦ + ك = د$

باتمام التريع  $ك + ٦ + ك + ١ = ١ + د$

وبالتجذير والمقابلة ك  $- = ٢ + ١٦ + ٤$

(٢) مفروض ك<sup>٢</sup> + ت + ك = ب ك = ح

بالتك حسب (٢٨) ك<sup>٢</sup> + (ت + ب) × ك = ح

بأنعام التريغ ك<sup>٢</sup> + (ت + ب) × ك +  $\frac{٢}{٢} \left( \frac{ب + ت}{٢} \right) = \frac{٢}{٢} \left( \frac{ب + ت}{٢} \right) + ح$

بالتجذير ك<sup>٢</sup> +  $\frac{ب + ت}{٢} = \frac{٢}{٢} \left( \frac{ب + ت}{٢} \right) + ح$

وبالمقابلة ك<sup>٢</sup> +  $\frac{ب + ت}{٢} = \frac{٢}{٢} \left( \frac{ب + ت}{٢} \right) + ح$

(٣) مفروض ك<sup>٢</sup> + ت - ك = ب

بالتك (٢٨) ك<sup>٢</sup> + (١ - ت) × ك = ب

بأنعام التريغ ك<sup>٢</sup> + (١ - ت) × ك +  $\frac{٢}{٢} \left( \frac{١ - ت}{٢} \right) = \frac{٢}{٢} \left( \frac{١ - ت}{٢} \right) + ب$

بالتجذير والمقابلة ك<sup>٢</sup> +  $\frac{١ - ت}{٢} = \frac{٢}{٢} \left( \frac{١ - ت}{٢} \right) + ب$

١٥٥ ينبغي في بعض الاحيان ان تُعدّ المعادلة لأنعام التريغ بالجبر او المقابلة

او التسمية او تبديل العلامات وما يشبه ذلك كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض ت + ٥ - ك = ب ٢ = ك - ك<sup>٢</sup>

بالمقابلة والجمع ك<sup>٢</sup> + ٢ = ك ٢ = ب - ت

بأنعام التريغ ك<sup>٢</sup> + ٢ + ك = ١ + ٢ + ب - ت

بالتجذير والمقابلة ك<sup>٢</sup> + ١ = ١ + ٢ + ب - ت

(٢) مفروض  $\frac{ك}{٢} = \frac{٢٦}{٢ + ك} - ٤$

بالجبر والمقابلة والجمع ك<sup>٢</sup> + ١٠ = ك ٥٦

بأنعام التريغ ك<sup>٢</sup> + ١٠ + ك = ٢٥ + ٨١

بالتجذير والمقابلة ك<sup>٢</sup> + ٥ = ٨١ ١٦ + ٥ = ١ + ٥

(٣) مفروض ك<sup>٢</sup> + ٢٤ - ح = ٦ ١٢ - ك = ٥ - ك<sup>٢</sup>

بالمقابلة والجمع ٦ ك<sup>٢</sup> - ١٢ = ك ٢٤ - ح

بالقسمة على ٦ ك<sup>٢</sup> - ٢ = ك - ح

بأنعام التريغ ك<sup>٢</sup> - ٢ + ك = ١ + ١ - ح

بالتجذير والمقابلة ك<sup>٢</sup> - ١ = ١ - ح

(٤) مفروض ح + ٢ = ك - د - د<sup>٢</sup>

بالجبر والمقابلة ب ك<sup>٢</sup> + ٢ = ت - د - د<sup>٢</sup>

$$\begin{aligned}
 & \text{بالقسمة على ب ك} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب}} \text{ ح} \\
 & \text{باتمام الترييع ك} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب}} \text{ ح} \\
 & \text{بالتجذير والمقابلة ك} - \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب}} \text{ ح} \\
 & (٥) \text{ مفروض ب ك} + \text{د ك} - \text{ك} = \text{ب} - \text{ح} \\
 & \text{بالقسمة على ب + د} - \frac{\text{ك}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{ب} - \text{ح}}{\text{ب} + \text{د}} \\
 & \text{ك} = \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{ب} + \text{د}} + \frac{\text{ب} - \text{ح}}{\text{ب} + \text{د}} \\
 & (٦) \text{ مفروض ت ك} + \text{ك} = \text{ح} + \text{ك} - \text{ك} \\
 & \text{بالمقابلة والجمع ت ك} + \text{ك} = \text{ك} - \text{ك} + \text{ح} \\
 & \text{بالقسمة على ت + ١} - \frac{\text{ك}}{\text{ت} + ١} = \frac{\text{ح}}{\text{ت} + ١} \\
 & \text{ثم ك} = \frac{\text{ت} + ١}{\text{ت} + ١} + \frac{\text{ح}}{\text{ت} + ١}
 \end{aligned}$$

١٥٦ لنفرض ت ك + ب ك = د فاذا ضرب الجانبان في د واضيف اليها ب فنعبر بالمعادلة د ت ك + د ت ب ك + ب = د + د ب فندري الجانب الاول قوة نامية من ٢ ت ك + ب ولنا من ذلك قاعدة اخرى لاتمام الترييع وهي ان نضرب المعادلة في اربعة افعال مسمى قوة المجهول العليا ونضيف الى الجانبين مربع مسمى قوتها الدنيا

نتبيه . هذه القاعدة اسهل من الاولى متى كان للمجهول مسميات لا يمكن ازالها بالقسمة لانه لا يحدث منها كسر في اتمام الترييع كما ترى في هذه الامثلة

$$\begin{aligned}
 & (١) \text{ مفروض ت ك} + \text{د ك} = \text{ح} \\
 & \text{باتمام الترييع حسب القاعدة الثانية} \\
 & \text{د ت ك} + \text{د ت د ك} + \text{د} = \text{د} + \text{د} + \text{ح} + \text{د} \\
 & \text{بالتجذير ٢ ت ك} + \text{د} = \text{د} + \text{د} + \text{ح} + \text{د} \\
 & \text{وبالمقابلة والقسمة ك} = \frac{\text{د} + \text{د} + \text{ح} + \text{د}}{\text{ت} + ٢}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{وباتمام الترييع حسب القاعدة الاولى لنا} \\
 & \text{ك} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}} = \frac{\text{د}}{\text{ت}} + \frac{\text{ح}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}} \\
 & \text{بالتجذير ك} + \frac{\text{د}}{\text{ت}} = \frac{\text{د}}{\text{ت}} + \frac{\text{ح}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}}
 \end{aligned}$$

وبالمقابلة ك - -  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

(٢) مفروض ك' + دك = ح

بإتمام التجميع ٤ ك' + ٤ دك = ٤ د + ٤ ح = ٤ د + ٤ ح

بالتجذير ٢ ك + ٢ د = ٢ د + ٢ ح

وبالمقابلة والقسمة ك =  $\frac{2}{2} = ١$

(٣) مفروض ٣ ك' + ٥ ك = ٤٢

بإتمام التجميع ٣٦ ك' + ٦٠ ك = ٢٥٢

بالتجذير والمقابلة والقسمة ك = ٢

(١) مفروض ك' - ١٥ ك = -٥٤

بإتمام التجميع ٤ ك' - ٦٠ ك = ٢٢٥

ثم ٢ ك = ١٥ + ٢ = ١٨ أو ١٢

تنبيه . اذا وقع - ك' في معادلة يجب تبديل جميع علاماتها حتى تصير النوع العليا من المجهول ايجابية (٦٥) لان - ك' لا يكون جزءا من مربع كمية ثنائية فلا يمكن اتمام التجميع

(١) مفروض - ك' + ٢ ك = د - ح

بتبديل العلامات ك' - ٢ ك = ح - د

ثم ك =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = ١$

(٢) مفروض ٤ ك' - ٢ ك = ١٢

بتبديل العلامات ك' - ٤ ك = ١٢

ثم ك =  $\frac{2}{4} = ١$

حيلة للتخلص من الكسور في اتمام التجميع

لنفرض المعادلة ا ك' + ب ك = س

افرض ك =  $\frac{1}{1}$  ثم ا ك' =  $\frac{1}{1}$  و ب ك =  $\frac{1}{1}$

وصارت المعادلة  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = س$  اي د' + ب د = اس

فاذا كان  $ب$  شغماً يتم التربع بالقاعدة الاولى بدون كمور وهذا التعمير  
يسهل العمل جداً

ان لم يكن  $ب$  شغماً فاضرب المعادلة في  $٢$  فيصير مستقي  $ك$  شغماً وتصبح المعادلة

$$١٢ ك + ٢ ب ك = ٢ س \quad (١)$$

$$\text{افرض } ك = \frac{٢}{١٢} \text{ ثم } ١٢ ك = ٢ \text{ و } \frac{٢}{١٢} ب ك = \frac{٢ ب}{١٢}$$

$$\text{والمعادلة (١) صارت } ٢ س = \frac{٢ ب}{١٢} + ٢ ب ك$$

$$\text{اي } ٢ ب ك + ٢ ب = ٢ س$$

$$\text{بانما التربع بالقاعدة الاولى } ٢ ب ك + ٢ ب = ٢ س + ٢ ب$$

بعض المسائل يصير حلها بواسطة القاعدةين المذكورتين وهي تستلزم في العامل

قطعة لاختراع حيل لاجل التخلص من كميات مشبكة وتحويل المسئلة الى معادلة

مربعة ولجل الاعانة على ذلك وتوضيح كيفية تلك المعادلات لتراجع مربع كمية ثنائية

$$\text{ان } ك + ١٢ ك + ١ = \text{مربع كمية ثنائية تام وهو مؤلف}$$

(١) من ثلاثة اجزاء

(٢) جزؤه الاول والثالث مربعان تامان

(٣) جزؤه الاوسط هو مضاعف حاصل جذري الجزء الاول والثالث

فلو فقد الجزء الثالث اي  $١$  لبقى  $ك + ١٢ ك$  ولا يتركب من هذه الكميات

مربع لان مربع كمية ثنائية لا بد ان يكون له ثلاثة اجزاء ولا بد من كون الجزء الثالث  
مربعاً

فلنفرضه  $ت = ١$  ثم حسب الافتراض

$$ك + ١٢ ك + ١ = \text{مربع تام لكيفية ثنائية}$$

وحسب الملاحظة الثالثة اعلاه  $٢ ك = ١٢ ك$

$$\text{اي } ت = ١ \text{ و } ١ = ١$$

فوجدنا الجزء المنقود اي  $١$

$$(١) ١٤ + ١٤ ب = \text{ما الجزء الاول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث}$$

لنفرض  $ت = ١$  ذلك الجزء الثالث

$$\text{ثم } ١٤ + ١٤ ب + ت = \text{مربع كمية ثنائية}$$

$$\text{اي } ١٤ + ١٤ ب + ت = ١٤ ب + ١٤ + ت = ١٤ ب + ١٤ + ١ = \text{ما الجزء الثالث}$$

المفقود و  $٩٤ + ١٤ + ب$  هو مربع كمية ثنائية وجذرها  $١٢ + ب$

(٢)  $٩٦ + ٢٦$  هي ما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ٢

(٣)  $١ + ٦$  هي ما الجزء الثاني والثالث لمربع كمية ثنائية مطلوب الأول

الجواب ١

(٤)  $\frac{٤٩}{٤} - ٤٩$  هي ما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب  $\frac{٤٩}{٤}$

(٥)  $٩ - ٦$  هي ما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ١

(٦)  $١ ك + ب ك$  هي ما الجزء الأول والثاني مطلوب الثالث الجواب  $\frac{ب}{١٤}$

(٧)  $٨١ ك + ١$  هي ما الجزء الأول والثالث مطلوب الاوسط الجواب  $١٨ + ١$

(٨)  $٨ ك - ٢$  هي ما الجزء الأول والثاني مطلوب الثالث الجواب  $١٦ ك$

(٩)  $\frac{١٢ ك}{١٩} + ٢٦$  هي ما الجزء الثاني والثالث مطلوب الأول الجواب  $\frac{٢ ك}{٣٦١}$

(١٠)  $\frac{٢٦ ك}{٣٦١} + ٢٦$  هي ما الجزء الأول والثالث مطلوب الاوسط الجواب  $\frac{١٢ ك}{١٩} + ١$

(١١)  $ك + \frac{١}{١٦}$  هي ما الجزء الثاني والثالث مطلوب الأول الجواب  $٤ ك$

(١٢) الجزء الأول  $\frac{٩ ك}{٢}$  والثاني  $\pm ١٢$  فما هو الثالث الجواب  $\frac{٤ ك}{٢}$

إذا كانت المعادلة بعد تحويلها على صورة  $ك + ١٢ = ب$  تحول بدون اتمام

التربيع بواسطة التعويض على هذه الكيفية

افرض  $ك = ١ - ٢$

ثم  $ك = ١ - ٢ = ١ - ٢$

و  $١٢ ك = ١٢ - ٢٤$

بالجمع  $ك + ١٢ = ١ - ٢ = ب$

ثم  $١ - ٢ = ١ - ٢$   $ك = ١ - ٢$

وذلك مثل ما يخرج بالقاعدة الاولى وهذه قاعدة التعويض

افرض قيمة المجهول مجهولاً آخر مع نصف مستقيم قوته الدنيا وعكس

علامة



لاجل زيادة ايضاح ماهية المعادلات المربعة لنحل هذه

مفروض  $ك^2 + ٤ك - ٦٠ = ٠$  مطلوب قيمة ك

بانتهاء الترييع  $ك^2 + ٤ك - ٦٤ = ٠$

بالتقدير  $ك + ٢ = ٨ - ك = ٦$  او  $ك = -١٠$

اي بالتعويض عن ك باحدى هاتين القيمتين في المعادلة الاصلية تكون صحيحة اي

$٦^2 + ٦ \times ٤ - ٦٠ = ٠$  و  $١٠^2 - ١٠ \times ٤ - ٦٠ = ٠$

اذا كان ك = ٦ فبالتقدير  $ك - ٦ = ٠$

اذا كان ك = ١٠ "  $ك + ١٠ = ٠$

اضرب احدي هاتين بالآخرى  $ك - ٦ = ٠$

$١٠ - ك = ٠$

$ك^2 + ٤ك - ٦٠ = ٠$

بالمقابلة  $ك^2 + ٤ك - ٦٠ = ٠$  وهي المعادلة الاصلية

فنرى ان المعادلة المربعة تتبر كانهما حاصل معادلتين بسيطتين من الدرجة

الاولى وقيمت ك في تلك المعادلات البسيطة سميت جذور المعادلة المربعة وذلك

بوضح سبب القيمتين اللتين للجهول في كل معادلة مربعة

ان لم توجد من المعادلة الا قيمة واحدة للجهول نستنتج ان القيمة الاخرى تعدلها

والجذران متساويان او ان احدهما صفر

١٥٧ قد يكون جزء من كمية ثنائية اصلية قوة مثل  $ك^2 + ت$  ومربعا

$ك^2 + ٢ك + ت^2$  فنرى دليل الجهول في الجزء الاول مضاعف دليله في

الثاني. وان فقد الجزء الثالث يستعمل بانتهاء الترييع حسبما تقدم. ولنا من ذلك هذه

القاعدة. وهي كل معادلة فيها قوتان من الجهول فقط دليل احدهما مضاعف دليل

الاخرى فنحل كمعادلة مربعة اي بانتهاء الترييع

(١) مفروض  $ك^2 - ٢ك - ب = ت$

بانتهاء الترييع  $ك^2 - ٢ك + ١ = ١ + ب - ت$

بالتقدير والمقابلة  $ك - ١ = ١ + ب - ت$



ففي الأولى والثانية لا تكون القيمة وهمية البتة . وتكون وهمية في الثالثة متى كان ب أكثر من  $\frac{1}{2}$  ثا فالقيمة الوهمية تدل على فساد مسئله كما تقدم (١٠٢)  
فلو قيل اقم ٨ الى قسمين حاصلها ٢٠ لقل ك (٨ - ك) = ٢٠ - ك  
١٠٤ - ٦ = ٤ وذلك مستحيل

١٥٩ للجهول في كل معادلة مربعة قيمتان حسبما تقدم (١٥٢) وغالباً تسمين التي يجب ان تؤخذ منها بشروط المسئلة . فلو قيل اقم ٢٠ الى قسمين حاصلها يعدل ثمانية امثال فضلها لتبل اصغرها = ك واكبرها = ٢٠ - ك وبشروط المسئلة  
ك (٢٠ - ك) = ٨ × (٢٠ - ك)

$$ك = ١٧ + ٢٢ = ٤٠ \text{ او } ٦$$

ولكن لا يكون ٤٠ قسماً من ٢٠ فيكون القسم الاصغر ٦ والاكبر ٢٤

١٦٠ لنا طريقة اخرى لحل المعادلات المربعة المتزجة . وهي بالتعويض .  
فلنفرض ك' = ف + ك + ق وفوق معروفتان . فلنفرض ك = ي +  $\frac{1}{2}$  ف ثم  
بالتعويض عن ك بهذه القيمة نصير المعادلة

$$ي + ف + ي + \frac{1}{2} ف = ف + ي + \frac{1}{2} ف + ق$$

$$ثم ي + \frac{1}{2} ف = ف + \frac{1}{2} ف + ق$$

$$ي = ف + ق \quad ي + \frac{1}{2} ف + ق = ق + \frac{1}{2} ف + ق$$

وك  $\frac{1}{2} ف + ق = ق + \frac{1}{2} ف + ق$  وفي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة متزجة كما  
نرى في هذه الامثلة الآتية

$$\text{مفروض ك' = ٦ + ك = ١١ ثم ك' = ٦ - ١١}$$

$$\text{وهنا ف = ٦ - وق = ١١ فلنا بموجب العبارة المذكورة - ٢ + ١١ + ١١}$$

$$= - ١٠ + ١٢ = ٢$$

$$\text{مفروض ك' = ١٠٩ - ٢٢ = ك}$$

$$\text{ثم ك' = - ك + ١٢٢ ف = - ١}$$

$$\text{ولنا - ١ + ١٢٢ + ١٢٢ = ك - ١ + ١٢٢ = ١١ - او ١٢}$$

$$\text{مفروض ك' = ٢ + ك = ١٨٠ ثم ك' = - ٢ + ك = ١٨٠}$$



باتمام التريع ك<sup>٢</sup> - ٤ك + ٤ = ١٣ او ١٢

بالتقدير ك<sup>٢</sup> - ١٢ = ٤ك + ٤ او ١٣

فللمجهول اربع قيم اي ك = (١٣ + ١٢) و ك = (١٣ - ١٢)

وك = (١٢ + ٤) و ك = (١٢ - ٤)

واذا نعوض عن المجهول في المعادلة الاصلية باحدى هذه القيات نصع

(٢) حل ك<sup>٢</sup> + ١٢ك + ٥ = ٤ك + ٤ = ٠ بواسطة معادلة مربعة

بما ان القوة العليا ليست شفعاً يجب ضرب المعادلة في ك فتصير

ك<sup>٣</sup> + ١٢ك<sup>٢</sup> + ٥ك = ٤ك<sup>٢</sup> + ٤ك = ٠

استخرج الجذر لجوهرين وانظر الباقي الذي يدخل في الجذر فلنا

(ك<sup>٢</sup> + ١ك) (ك<sup>٢</sup> + ٤ك + ٥) = ٠

اقسم على (ك<sup>٢</sup> + ١ك) نصير ك<sup>٢</sup> + ٤ك + ٥ = ٠ وهي معادلة مربعة

(٢) حل ك<sup>٢</sup> + ٣ك - ٤ = ٠ بواسطة معادلة مربعة

هذه المعادلة تكتب على هذه الصورة

(ك<sup>٢</sup> + ٤ك) - ٨ = ٠

ك = ١ او ٢ او -٢ او -٤

(٤) مفروض ك<sup>٢</sup> - ٨ك + ١٦ = ١٢ = ٠ المطلوب قيمات ك

ك = ١ او ٢ او ٤

ك = ٤ او -٢

(٥) ك<sup>٢</sup> - ٢ك + ٤ = ١٢

قد حللت هنا بعض المسائل دلالة على بعض الحيل التي نعتد في حل المسائل

من هذا الباب

(١) افرض ٢ك<sup>٢</sup> + ٣ك + ١ = ٥ - ٢ك<sup>٢</sup> + ٢ك + ١ = ٦

وافرض ٢ك<sup>٢</sup> + ٢ك + ١ = ٥

بالترقية ٢ك<sup>٢</sup> + ٣ك + ١ = ٥ - ٢ك<sup>٢</sup> + ٢ك + ١ (١)

فصارت المعادلة ٤ك<sup>٢</sup> + ٥ك = ٠ (٢) افرض ١٢ = ٥

ثم ١٢ = ٥ - ١

اضف ١ الى الجانبين لاجل اتمام التريع نصير ١٢ = ٥ - ١ + ١ = ١٢ + ١

بالتجذير  $1 - 1 = 1 + 1 = 2$  ي  $1 + 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

(٢) مفروض  $1 - 1 = 2$  ي  $1 + 1 = 2$  الجواب  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

(٣) مفروض  $1 + 1 = 2$  ك  $1 + 1 = 2$  افرض  $1 + 1 = 2$

ثم  $1 + 1 = 2$  عوض هذه القيات عن المسميات العددية

وتم التوزيع نصير  $1 + 1 = 2$  ك  $1 + 1 = 2$  او  $1 + 1 = 2$

بالتجذير  $1 + 1 = 2$  ك  $1 + 1 = 2$  او  $1 + 1 = 2$

(٤) مفروض  $1 - 1 = 2$  ك  $1 - 1 = 2$  افرض  $1 - 1 = 2$  ثم  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

ك  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

بالتجذير  $1 - 1 = 2$  ك  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

(٥) مفروض  $1 + 1 = 2$  ك  $1 + 1 = 2$  مطلوب قيمة ك

افرض  $1 + 1 = 2$  ثم  $1 + 1 = 2$  بالتعويض وانما التوزيع لنا

ك  $1 + 1 = 2$  او  $1 + 1 = 2$

بالتجذير  $1 + 1 = 2$  ك  $1 + 1 = 2$  او  $1 + 1 = 2$

في هذه المعادلات فرضنا مسمى القوة الاولى للجهول  $1 - 1 = 2$  ثم اذا وجدنا الجذر

المطلق في الجانب الثاني يعدل  $1 + 1 = 2$

او  $1 + 1 = 2$

او  $1 + 1 = 2$

او  $1 + 1 = 2$  او على الاطلاق  $1 + 1 = 2$  اعني

المضروب في  $1 + 1 = 2$  مربع ذلك المضروب في  $1 + 1 = 2$  الجانب الثاني من المعادلة في

تعمل على الطريقة التي اشرنا اليها وذكرنا امثلتها لان جنراً من جنري المعادلة هو

هذا المضروب في  $1 + 1 = 2$  والجذر الآخر هو  $1 + 1 = 2$  اذا كان  $1 + 1 = 2$  المضروب

في  $1 + 1 = 2$  ولازمة لهذه الطريقة ان لم تكن  $1 + 1 = 2$  كية صحيحة وصغيرة

مثال معادلة فيها  $1 + 1 = 2$  ك

ك  $1 - 1 = 2$  مطلوب قيمة ك

افرض  $1 - 1 = 2$  ثم  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

فصارت المعادلة  $1 - 1 = 2$  ك  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

ك  $1 - 1 = 2$  او  $1 - 1 = 2$

اذا كانت جذور المعادلة كميات صماء او غير منطقية فالطريقة المذكورة لا تنوافق واستعلام كون الجذور منطقية او صماء امر سهل

$$\text{مثاله لنفرض ك}^2 + ١٢ ك - ٤٠ = ٠$$

$$\text{افرض } ١٢ = ١٤ - ٢ \text{ ثم } ٢٠ = ٤ + ١٦ \text{ و } ٤٨ = ٩ + ١٦$$

ومن ذلك نرى ان واحداً من جذري المعادلة واقع بين ٢ و ٣

اذا كانت جذور المعادلة كميات غير منطقية او صماء فلا تنفيدنا حيلة من الحيل لحل المعادلة بل يقتضي مما ملئها بموجب القواعد الثابتة غير انه اذا كانت الجذور اعداداً صحيحة ولم تكن كبيرة قد تخترع لكل مسألة حيلة لاجل التخلص من الاعداد الكبيرة وذلك بتعلم بالممارسة اذ لا قاعدة ضابطة يسلك عليها في ذلك وقد وضعت هنا بعض الامثلة ايضاً للمعنى

$$(١) \text{ مفروض ك}^2 + ٩٩٨٤ ك = ١٦٠٠٠٠ \text{ مطلوب قيمة ك}$$

$$\text{لاحظ ان } ٩٩٨٤ = ١٠٠٠٠ - ١٦$$

$$\text{افرض } ١٢ = ١٠٠٠٠ \text{ ثم } ١٦٠٠٠٠ = ١٢٢$$

$$\text{بالتعويض ك}^2 + (١٦ - ١٢) ك = ١٢٢$$

$$\text{بانعام التريع بالقاعدة الاولى ك}^2 + (١٦ - ١٢) ك + (٨ - ١) = ١١٦ + ٦٤ +$$

$$\text{بالتجذير ك}^2 + (٨ - ١) ك + (٨ + ١) ك = ١٦ - ١٢ او ١٢ - ١٠٠٠٠ =$$

$$(٢) \text{ مفروض ك}^2 + ٤٥ ك = ٦٠٠٠ \text{ مطلوب قيمة ك}$$

$$\text{اذا فرضنا } ١٢ = ٤٥ \text{ يكون المضروب فيه ومربعة حتى يصير } ٦٠٠٠ \text{ كبيراً}$$

فلامتزية في هذه الطريقة والفرض التخلص من الاعداد الكبيرة. فلاحظ ان  $٤٥ \times$

$$٢٠٠ = ٦٠٠٠ \text{ ثم افرض } ١ = ٤٥$$

$$\text{وبالتعويض ك}^2 + ١ ك = ١٢٠٠$$

$$\text{ثم التريع بالقاعدة الثانية ك}^2 + ١٤ ك + ١ = ١٨٠٠ + ١$$

$$\text{بالتجذير ك}^2 + ٢ ك + ١ = ١٨٠٠ + ١ \text{ او } ١٨٠٠ \times ٤٥ = ٨١٠٠٠$$

اضرب احد الضلعين تحت علامة التجذير في ٥ واقسم الآخر على ٥ يصيران

$$١٦٩ \times ٢٢٥ \text{ وكل واحد منها مربع. جذرها ورجع القيمة المفروضة لما}$$

$$\text{نصير المعادلة ك}^2 + ١٥ \times ٢ = ١٥ \times ١٢$$

$$\text{اخرج } ١٥ \times ٢ \text{ من الجانبين ك}^2 + ١٥ \times ١٠ = ٧٥$$

(٦) مفروض  $١٦ ك - ٢٢٥ = ٢٢٥ ك$  مطلوب قيمة  $ك$

لاحظ ان  $٢٢٥ = ١٥ \times ١٥$  ثم افرض  $١٥ = ١$   $١٦ = ١ + ١$

بالتعويض  $(١ + ١) ك - ١ ك = ١$

ثم الترييع بالقاعدة الثانية

$٤ (١ + ١) ك - ٤ (١ + ١) ك + ٤ = ٤ + ٤ + ٤$

بالتجذير  $٢ (١ + ١) ك - ١ ك = ١$   $١٢ + ١$

انقل  $١$  واقسم على  $٢$   $(١ + ١) ك = ١ + ١$   $١ = (١ + ١)$

اقسم على  $١ + ١$   $ك = ١ = ١٥$

(٧) مفروض  $\frac{١٨}{ك} + \frac{ك - ٨}{٩} = \frac{٧٥ - ك}{٧٢}$  مطلوب قيمة  $ك$

تري الاعداد اما  $٩$  واما مضروب  $٩$  فلنفرض  $٩ = ١$

بالتعويض  $\frac{١٨}{ك} + \frac{ك - ٩}{١} = \frac{٧٥ - ك}{١٨}$

بالتجبر  $١٦ ك + ١٨ ك - ٨ ك = ٧٥ - ك$

انقل الكل الى جانب واحد ورتب الكميات على ترتيب القوتات نصير

$$ك + ٨ ك - ٦٥ ك - ٨ ك - ١٦ ك = ٠ \quad | \quad ك + ٤ ك$$

$$\begin{array}{r} ٢ ك + ٤ ك \\ \hline ٨ ك - ٦٥ ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٨ ك + ١٦ ك \\ \hline ٨ ك - ١٦ ك \end{array}$$

$$١ - (٨ ك + ١٦ ك)$$

فحسب ما تقدم آنفا صارت المعادلة

$$٠ = (٨ ك + ١٦ ك) - (٨ ك + ١٦ ك)$$

او  $(٨ ك + ١٦ ك) - (٨ ك + ١٦ ك) = ٠$  باقسمة  $ك = ١$

$$١ + ١ = ١ + ١$$

الامثلة المتقدمة تبين على حل بعض هذه الامثلة الآتية

$$ك = ٥ \text{ او } ١٦$$

$$(٥) \text{ مفروض } ١١ ك + ٨٠ = ٨٠$$

$$ك = ٤ \text{ او } ١$$

$$(٦) ٥ ك - \frac{ك - ٢}{٢} + ٢ ك = \frac{٢ - ك}{٢}$$

$$ك = ٢$$

$$(٧) \frac{١٢}{٦} = \frac{١ + ك}{ك} + \frac{ك}{١ + ك}$$



$$\frac{1}{r} - \text{او} ٨ - \text{او} ٢ = \text{ك} \quad ١٦ + \text{ك} ٣٤ = \frac{\text{ك} ١٧}{r} + \frac{\text{ك}}{r} \quad (٨)$$

$$\text{ك} = ٤ \text{ او} ١ \quad \frac{r}{\text{ك}} + ٢ - ١ = \text{ك} \quad (٩)$$

$$\text{ك} = ٥ \text{ او} ٢ \quad ٢ - \text{ك} = \frac{1}{r} \left( \frac{١ - \text{ك} ٦ + \text{ك}}{١ - \text{ك} ٦ - \text{ك}} \right) \quad (١٠)$$

$$\text{ك} = ٧ \text{ او} ٤ \quad ٨٠ = \text{ك} ٩ - \text{ك} ٩ = ٨٠ \quad (١١)$$

$$\text{ك} = ١٢ \text{ او} \frac{r}{٤} \quad ٤٦ - \frac{\text{ك} - ٣٦}{r} = \text{ك} ٤ \quad (١٢)$$

$$\text{ك} = ٤ \text{ او} \frac{٧}{٤} \quad ١٤ = \frac{\text{ك} - ١٤}{١ + \text{ك}} - \text{ك} ٤ \quad (١٣)$$

$$\text{ك} = ٤ \text{ او} ١ \quad \frac{٦ - \text{ك} ٢}{r} + \text{ك} ٢ = \frac{٢ - \text{ك} ٢}{r - \text{ك}} - \text{ك} ٥ \quad (١٤)$$

$$\text{ك} = ٤ \text{ او} \frac{١}{١٢} \quad ٢ = \frac{\text{ك} ٩ - ١٠}{r ٤} - \frac{١٦}{r} \quad (١٥)$$

$$\text{ك} = ١٢ \text{ او} ٦ \quad \frac{r - \text{ك}}{r} - ١٠ = ١ + \frac{\text{ك} - ٤}{r} \quad (١٦)$$

$$\text{ك} = ٢١ \text{ او} ١ \quad ١ - \frac{٧ + \text{ك} ٤}{r} = \frac{\text{ك} - ٧}{r - \text{ك}} - \frac{\text{ك} + ٤}{r} \quad (١٧)$$

$$\text{ك} = ١ \text{ او} ٢٨ \quad ٢ - \text{ك} = \frac{١ + \text{ك} ١٠ - \text{ك}}{١ + \text{ك} ٦ - \text{ك}} \quad (١٨)$$

$$\text{ك} = ٢ \quad ٢ = \frac{r}{\text{ك}} + \frac{١}{١ + \text{ك}} \quad (١٩)$$

$$\text{ك} = ١٠ \quad ٩ - \text{ك} = \frac{١ - \text{ك}}{r} - \frac{\text{ك} ٢}{r + \text{ك}} \quad (٢٠)$$

$$\text{ك} = ١ + \sqrt{١ - \text{ك}} \quad \frac{r}{\text{ك}} = \frac{\text{ك}}{r} + \frac{\text{ك}}{\text{ك}} \quad (٢١)$$

$$\text{ك} = \left( \frac{r}{\text{ك}} + \text{ب} \right) \sqrt{\frac{\text{ك}}{r}} + \frac{\text{ك}}{r} \quad \text{ب} = \text{ك} + \text{ك} \quad (٢٢)$$

$$\text{ك} = \sqrt{\frac{r}{\text{ك}}} \quad \frac{1}{r} = \frac{r}{\text{ك}} - \frac{r}{r} \quad (٢٣)$$

$$\text{ك} = \frac{1}{٨} \quad ٢ = \frac{r}{\text{ك}} + \frac{r}{r} \quad (٢٤)$$

$$\text{ك} = ٤٩ \quad ٢٢ \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{r}{\text{ك}}} - \frac{1}{r} \quad (٢٥)$$

$$\text{ك} = \frac{1}{r} \quad ٩٩ = ٩٦ + \text{ك} - \text{ك} \quad (٢٦)$$

$$\text{ك} = ٦ \quad ٢ = \frac{1}{r} (\text{ك} + ١٠) - \frac{1}{r} (\text{ك} + ١٠) \quad (٢٧)$$

$$\text{ك} = \sqrt{r} \quad ٨ = \text{ك} ٢ - \text{ك} ٢ \quad (٢٨)$$

$$\text{ك} = \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r} = \sqrt{r - \text{ك}} + \sqrt{1 - \text{ك}} - (\text{ك} - \text{ك} + ١) \quad (٢٩)$$

$$\text{ك} = \frac{r - \text{ك}}{r} \quad \text{ب} = \text{ك} = \frac{r - \text{ك}}{r} \quad (٣٠)$$

$$\text{ك} = ٤ \quad \frac{\text{ك} - ٤}{r} = \frac{r + \text{ك} ٤}{r} \quad (٣١)$$

$$\text{ك} = ٢٤٩ \quad ٧٥٦ = \text{ك} + \text{ك} \quad (٣٢)$$

$$\text{ك} = ٤ \quad \frac{r}{1 + \text{ك} ٢} = \sqrt{\frac{r}{\text{ك}}} + \sqrt{1 + \text{ك} ٢} \quad (٣٣)$$

$$(٢٩) \quad \frac{٧ت + ٥ك}{\sqrt{٧ت - ٥ك}} = \sqrt{٢٢} + \sqrt{٢٢} - ٢ك - ١ت$$

$$(٣٠) \quad ١٠ - ٤\sqrt{١٦ + ك} = ٧\sqrt{١٦ + ك} - ١٦ + ك$$

$$(٣١) \quad \sqrt{٦} = \sqrt{٦} + \sqrt{٦} - ٦$$

بالقسمة على  $\sqrt{٦}$   $١ = ١ + ١ - \sqrt{٦}$

$$(٣٢) \quad \frac{١٢ + ك}{\sqrt{١٢ + ك}} = \frac{٧ - ك}{\sqrt{٧ - ك}} - \frac{٥ - ك}{\sqrt{٥ - ك}}$$

$$(٣٣) \quad \frac{١١}{\sqrt{١١}} = \frac{٦}{\sqrt{٦}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}$$

$$(٣٤) \quad ١ = ١ - (١ - ٢) = ٢ - ١ = ١$$

$$(٣٥) \quad ١٠ = ك + \sqrt{٦ + ك} + ٢ = \sqrt{٦ + ك} + ٢$$

$$(٣٦) \quad \frac{\sqrt{٨ب + د + ٢س}}{٤ب} = ك - ٢ب - ٢س - ٢ك - ٢د$$

$$(٣٧) \quad \frac{\sqrt{١٦ + ٢ب + ٢س}}{٨ت} = ك - ٤ت - ٢ب - ٢س - ٢ك - ٢س$$

$$(٣٨) \quad \frac{\sqrt{٢٤ - ٢ب + ٢س}}{٢} = ك - ٢ب - ٢س - ٢ك - ٢س$$

$$(٣٩) \quad ١٢ = ك + ٤ك - ٢ك$$

$$(٤٠) \quad ٨ - ٢ك = ١٢ - ٢ك$$

$$(٤١) \quad ٨١ = ك - ٢ك - ٢ك$$

$$(٤٢) \quad ١٥ - ٢ك + ٤ = ك - ٢ك - ٢ك$$

$$(٤٣) \quad ١٤ - ٢ك + ٦ = ك - ٢ك - ٢ك$$

$$(٤٤) \quad ٦ - ٢ك + ٨ = ك - ٢ك - ٢ك$$

$$(٤٥) \quad ١٠ + \frac{٢٢}{ك} + \frac{٨٤}{ك} = \frac{١}{ك} + ١٧ + \frac{٢}{ك}$$

$$(٤٦) \quad ك - ٢ - ٢ = \frac{١}{ك} + ٦ + \frac{٢}{ك}$$

$$(٤٧) \quad \frac{\sqrt{١١١ + ٢}}{٤} = ك - ٢ = ١٥ + ٢ك$$

$$(٤٨) \quad \frac{\sqrt{٤ - ٢}}{٤} = ك - ٢ = ١٠ - \frac{١}{ك}$$

# عَلَيَات

(١) تاجرٌ عنده ثوبان طولهما ١١٠ اذرع وإن طُرِحَ مربع اذرع اطولهما من ٨٠ مرة اذرع الآخر في ٤٠٠ فكم ذراعاً كل ثوب.

لتفرض ك اطولهما و ١١٠ - ك الآخر

بشروط المسئلة ٤٠٠ =  $(١٠ - ك) \times ٨٠$  - ك

ك = ٦ اطولهما ٥٠ = الآخر

(٢) سُئِلَ أَخَوَانِ كَمْ عَمْرُكُلٍ وَاحِدٍ مِنْكُمَا . فَقَالَا مَجْمُوعَ عَمْرَيْنَا ٤٥ سَنَةً وَحَاصِلُهَا

٥٠٠ سَنَةً . فَمَكَمْ عَمْرُكُلٍ مِنْهَا

الجواب ٢٥ و ٢٠

(٢) أَيُّ عَدَدَيْنِ فَضْلَتُهَا ٤ وَحَاصِلُهَا ١١٧

ك = اَحَدُهُمَا ك + ٤ = الآخر

ثم (ك + ٤)  $\times$  ك = ١١٧

(٤) تاجرٌ باعَ ثوباً كَانَ قَدْ اشْتَرَاهُ بِثَلَاثِينَ دِينَاراً وَلَوْ ضَرَبَ الثَّمَنَ الَّذِي بَاعَهُ

بِهِ فِي الرِّجْحِ الَّذِي رَجَحَهُ لَكَانَ الْحَاصِلُ مَكْمَبِ الرِّجْحِ . فَمَكَمْ كَانَ الرِّجْحُ

لتفرض ك = الرِّجْحُ فيكون ٢٠ + ك ثَمَنُ الْمِيعِ

ثم بشروط المسئلة ك =  $(٢٠ + ك) \times ك$

(٥) أَيُّ عَدَدَيْنِ فَضْلَتُهَا ٢ وَفَضْلَةُ كَعِيبِهَا ١١٧

ك = الأصغر ك + ٢ = الأكبر

(٦) مَا عَدَدَانِ فَضْلَتُهَا ١٢ وَمَجْمُوعُ مَرَبَعَيْهَا ١٤٢٤

(٧) مَا عَدَدَانِ فَضْلَتُهَا ٧ وَنِصْفُ حَاصِلِهَا مَعَ ٢٠ يُعْدَلُ مَرَبِعَ أَصْغَرِهَا

ك = الأصغر ك + ٧ = الأكبر

ثم بالمسئلة ك =  $\frac{٢٠ + (٧ + ك)}{٢} \times ك$  - ك

(٨) سَرَبٌ طَوِيرٌ طَارَ مِنْهُ جَنْدَرٌ مَالٌ نِصْفُهُ ثُمَّ  $\frac{١}{٤}$  مِنْهُ وَبَقِيَ طَائِرَانِ . فَمَكَمْ طَائِرَانِ

كَانَ السَّرَبُ

لتفرض العدد ٢ ك فلنا ك +  $\frac{١٦}{٢} + ك = ٢$  - ك

الجواب ٧٣ طائراً

(٩) رَجُلٌ اشْتَرَى قِطْعَةً مِنَ الْغَنَمِ بِثَمَنٍ ٢٤٠٠ دِينَارٍ . وَلَوْ زِيدَ عَدَدُ الْغَنَمِ ٨

روثوس لكان ثمن كل رأس اقل مما كان في الحقيقة ١٠ دنانير. فكم رأساً كان القطيع  
الجواب ٤٠

(١٠) رجل اشترى موائى يبلغ ١١٤٠ ديناراً ويات منها ٨ روثوس ثم باع  
الباقى ورجع في كل رأس ٨ دنانير ولم يخسر شيئاً. فكم رأساً اشترى الجواب ٢٨  
(١١) زيد وعبيد سافرا معاً فاصدين مكاناً بعده عنها ٢٠٠ ميل. وزيد  
سبق عبيداً كل ساعة ميلاً فوصل قبلة بعشر ساعات. فكم ميلاً مشى كل واحد منها  
في الساعة زيد = ٦ اميال وعبيد = ٥ اميال

(١٢) اقسام ١٨ الى ضلعين حتى يكون مجموع كميهما ٢٤٢

ك = احدها  $\frac{18}{3} = ٦$  الآخر

ك = اكبرها  $\frac{18}{2} = ٩$  اصغرها

(٢) اى عدد من فضلتهما ١٢٠ ونسبة اكبرهما الى اصغرها :: الاصغر : ١٠

الجواب ٤٠ و ١٦٠

(١٤) اى عدد من مجموعهما ٦ ومجموع كميهما ٧٢ الجواب ٢ و ٤٠

(١٥) اقسام ٥٦ الى ضلعين حاصلها ٦٤٠ الجواب ٤٠ و ١٦٠

(١٦) رجل اشترى اثواباً ثمنها ٦٧٥ ديناراً. ثم باع كل ثوب بثانية واربعين

ديناراً ورجع مبلغاً بمائتين الثوب الاصلي. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٥

(١٧) رجل اشترى فرساً مبلغ من المال ثم باعه بمئة وتسعة عشر ديناراً ورجع في

المئة ما ياتل الثمن الاصلي فكم كان ثمنه

ك = الثمن فيكون ك ايضا الربح في المئة  $\frac{2}{100}$  والربح كله

فلما ك +  $\frac{2}{100} = ١١٩$  ك = ٧٠

(١٨) رجل اشترى اثواباً يبلغ ١٨٠ ديناراً. ولو زيد ثلاثة اثواب لانحط ثمن

الثوب ثلاثة دنانير. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٢

(١٩) تاجران تشاركا وكن رأس مالهما ١٠٠ دينار. وبقيت حصة احدهما في

الشركة ثلاثة اشهر وحصة الآخر شهرين. ثم انصفت الشركة فحصل لكل واحد منهما

من رأس المال والربح ٦٩ ديناراً. فكم وضع كل واحد من رأس المال في الاصل

لنفرض ك = حصة الاول و ١٠٠ - ك = حصة الثاني. فيكون ربح الاول

٦٩ - ك لثلاثة اشهر وك = ١ = ربح الثاني لشهرين ولو بقي رأس مالو ثلاثة اشهر

لكان ربحه  $\frac{2}{3} = ٢$  ولكن الربح هو ك رأس المال. فلما ك = ٦٩ - ك = ١٠٠ - ك

ك = ٤٥ = الأول = ٥٥ = الثاني

(٢٠) نزلت امرأتان الى السوق ومع كل واحدة منها عدد من البيض خلاف ما مع الاخرى ولكن الجميع ١٠٠ بيضة. فباع كل واحدة ما معها بثمن واحد. فقالت احدهما للاخرى لو كان معي من البيض قدر ما معك لاختفت ثمنه ١٥ غرشاً. وقالت الاخرى لو كان معي قدر ما معك لاختفت ٦ ١/٢ غروش. فكم بيضة كان مع كل واحدة منهما لنفرض ما مع الاولى = ك وما مع الاخرى ١٠٠ - ك. وبما ان الاولى كانت قد باعت ١٠٠ - ك بثمن ١٥ غرشاً لنا (١٠٠ - ك) : ١٥ :: ك : ١٥ - ك والثانية كانت باعت ك بثمن ٦ ١/٢ غروش لنا

$$ك : (١٠٠ - ك) :: \frac{٢٠}{٣} : \frac{٢٠٠٠ - ٢٠٠}{٣} ك$$

ثم ان كل واحدة اخذت مبلغاً واحداً فلنا

$$\frac{١٥ - ك}{١} = \frac{٢٠٠٠ - ٢٠}{٣} ك$$

ك = ٤٠ = الاولى = ٦٠ = الثانية

(٢١) تاجران باعا اذرعاً من قشير بمبلغ ٢٥ ديناراً وباع احدهما ٢ اذرع زيادة عن الآخر. فقال له صاحبه لو بعث ما بعته لاختفت ٢٤ ديناراً فقال وانا لو بعث ما بعته لاختفت ١٢ ١/٢ دينار. فكم ذراعاً باع كل واحد منهما

ك = ما باعه الأول وك + ٢ = ما باعه الثاني. فيكون ك ٢٤ ثمن ك اذرع و ٢٥ + ك ثمن ك + ٢ اذرع فلنا

$$٢٥ = \frac{٢٥ + ك}{٣} + \frac{٢٤ + ك}{٣}$$

ك = ١٠ + ٥ = ١٥ او ٥ = الأول

١٨ او ٨ = الثاني

(٢٢) سافر زيد وعبيد قاصدين بلدة بعدها عنها ١٥٠ ميلاً وزيد قطع من المسافة كل ساعة ٢ اميال زيادة عن عبيد فوصل قبل عبيد بثلاث ساعات وعشرين دقيقة فكم قطع كل واحد منهما في الساعة

(٢٣) اي عدد من فضلتها ٦ واذا اضيف ٤٧ الى مضاعف مربع الاصغر يعدل

المجموع مربع الاكبر

(٢٤) زيد وعبيد تصدقا على الفقراء كل واحد منهما بمبلغ ١٢٠٠ دينار والذين

اعطاهم زيد اربعون نفراً اكثر من الذين اعطاهم عبيد غير ان صدقة عبيد لكل واحد ٥ دنابر اكثر من صدقة زيد. فكم كان عدد الفقراء جميعاً

زيد = ١٢٠٠ عبيد = ٨٠

- (٢٥) ما عددان مجتمعا ١٠ ومجتمع مربعها ٥٨      الجواب ٧ و ٢
- (٢٦) اشترك رجلان في شراء بستان ثمنه ١٧٥ ديناراً. ثم خرج اثنان من الشركة فلتحق كل واحد من الآخرين ١٠ دنانير زيادة عما كان قد لحقه لوبقي الاثنان معهم. فكم عددهم أولاً      الجواب ٧
- (٢٧) تاجر اشترى اذرعاً من القماش بستين ديناراً. فاشتد منها لنفسه ١٥ ذراعاً وباع الباقي باربعة وخمسين ديناراً مرج في كل ذراع  $\frac{1}{10}$  دينار. فكم ذراعاً اشترى وكم كان الثمن      الجواب ٧٥ ذراعاً و  $\frac{1}{10}$  دينار ثمن الذراع
- (٢٨) سافر زيد من بلدة وعمره من اخرى فاصدين ان يلتقيا في مكان وبين البلدين ٢٤٧ ميلاً. فريد قطع كل يوم ٦ اميال والايام التي سافرا فيها قبل التقائهما تزيد ثلاثة ايام عن عدد الاميال التي قطعها عمرو في اليوم. فكم ميلاً سافرا      الجواب زيد = ١١٧ وعمره = ١٢٠
- (٢٩) رجل اشترى ثوبين من الجوخ ثمن الذراع من الواحد يزيد ٤ دراهم عن ثمن الآخر. وكان ثمن هذا الثوب جميعه ٢٦٠ درهماً وثمن الآخر جميعه ٢٢٠ درهماً ولكنه اطول من الاول بذراعين. فكم ذراعاً كان كل واحد منهما وكم ثمن الذراع منه      الجواب الاول ١٨ ذراعاً وثمن الذراع ٢٠ درهماً والآخر ٢٠ ذراعاً وثمن الذراع ١٦ درهماً
- (٣٠) رجل اشترى ٥٤ رطلاً من الخمر الاصفر وعدة ارطال من الخمر الاسود وكان ثمن الرطل من الاول يعدل نصف ارطال الثاني وثمن الرطل من الثاني اقل من ثمن الرطل من الاول اربعة دراهم. ثم مزجها وباع الرطل من المزيج بعشرة دراهم فبحر ٥٧٦ درهماً. فكم كان ثمن الرطل من الاصفر وكم عدد ارطال الاسود      الجواب الرطل من الاصفر = ١٨ درهماً والاسود ٢٦ رطلاً
- (٣١) ابي عدي اذا طرح مربعه من ٤٠ واضيف الى جذر الباقي المائي ١٠ وضرب المجموع في ٢ وانقسم المحاصل على العدد نحو يخرج ٤      الجواب ٦
- (٣٢) سئل رجل عن عمره فقال اذا اضيف جذره المائي الى نصفه وطرح من المجموع ١٢ لا يبقى شيء. فكم كان عمره      الجواب ١٦
- (٣٣) رجل اشترى زقين من الخمر ثمنها ٥٨ غرشاً. وفي الواحد منها ٥ ارطال زيادة عن الآخر وثمن الرطل اقل من  $\frac{1}{2}$  عدة ارطال الاصفر بفرشين فكم رطلاً في كل زق وكم ثمن الرطل      الجواب الاكبر = ١٧ والاصفر = ١٢ وثمن الرطل = ٢

(٢٤) رجل معه ٢٤ قطعة بعضها فضة وبعضها نحاس . وقيمة القطعة من الفضة تساوي غروشاً عدد قطع النحاس وقيمة القطعة من النحاس تساوي عدد قطع الفضة . فكم عدد القطع

المجواب الفضة = ٦ والنحاس = ١٨

(٢٥) رجل اشترى عدة من الفم بثمانين ديناراً . ولو اخذ بهذا الثمن اكثر مما اخذ باربعة رؤوس لانحط ثمن الراس ديناراً واحداً . فكم راساً اشترى

المجواب ١٦

(٢٦) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر ١ : ٤ وبينهما ٢٠ فيراً طاماً مطلوب النقطة من الخط الموصل بين مركزيهما التي فيها يجذب كل واحد ابرة على حدة سوى على افتراض ان الجاذبية في القلب كمرع البعد

المجواب ٨ قراريط عن اقربها

او - ٤٠ قرارطاً عن اضعفها

(٢٧) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر م : ن . وبينهما ب قراريط . في اية نقطة على الخط الموصل بين مركزيهما تكون جاذبيتها لابرقة واحدة

المجواب عن م =  $\frac{ب^2}{ب^2 + م^2}$

البعد عن ن =  $\frac{ب^2}{ب^2 + م^2}$

١٦١ كثيراً ما تسهل الاعمال الجبرية ولا سيما حل المعادلات بواسطة التحويل عن عبارة طويلة مجرد واحد . وعند نهاية العمل ترجع العبارة الاصلية . فلو فرض  $ك - ٢ = ك + \frac{٢}{٤} - ٨٦ - ٦٤ + ح$  فافرض ب عوضاً عن الجانب الثاني فتصير  $ك - ٢ = ك - ب$  ثم  $ك = ب + ٢$  ثم بترجع العبارة الاصلية فتصير  $ك = ت + \frac{٢}{٤} - ٨٦ - ٦٤ + ح$

ولو فرض ت ك - ٢ = د = ب - ك - ٢ = ك - ٢

فبالقابلة والتك تعبر ك + (ت - ب - ١) ك = د

افرض ح عوضاً عن (ت - ب - ١) فلنا ك + ح = د

ثم ك =  $\frac{د}{٢} - \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤}$

وبترجع العبارة الاصلية ك =  $\frac{د}{٢} - \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} + (ت - ب - ١) ك + د$

وما من احد يدري في حل المسائل الجبرية ان لم يعود نفسه على التعويض المناسب  
كما تقدم وكثيراً ما تحل المسائل بسهولة بواسطة التعويض ويختصر العمل كما ترى في  
هذه المسئلة وكما رأيت في ما تقدم

$$(١) \text{ ك }^{\text{ف}} + \text{ك }^{\text{ي}} = ٢٠$$

$$(٢) \frac{١}{٤} = \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦}$$

$$\text{بالتك ك }^{\text{ف}} + \text{ك }^{\text{ي}} = \text{ك }^{\text{ي}} (\text{ك } + \text{ك }^{\text{ي}})$$

$$(٣) \text{ بالجبر ك } + \text{ك }^{\text{ي}} = \frac{\text{ك }^{\text{ي}}}{٦}$$

$$\text{افرض ك } + \text{ك }^{\text{ي}} = \text{ص } \text{وك }^{\text{ي}} = \text{ف}$$

$$\text{وعوض بذلك في (١) فصير ص } = ٢٠$$

$$\text{و } ٦\text{ص} = ٢٠$$

فستعلم قيمة ص وف ومنها قيمة ك وي

فائدة . اذا كان المجهولان في معادلتين من صورة

$$(١) \text{ ك } + \text{ك }^{\text{ي}} = \text{ص}$$

$$(٢) \text{ ك }^{\text{ي}} = \text{ف}$$

تعمل المسئلة على هذه الكيفية

$$(١) \text{ ربع (١) ك } + ٢\text{ك }^{\text{ي}} + \text{ك }^{\text{ف}} = \text{ص}$$

$$\text{اضرب (٢) } \times ٤ \text{ وا طرح } ٤\text{ك }^{\text{ي}} = ٤\text{ف}$$

$$\text{الفضل ك } - ٢\text{ك }^{\text{ي}} + \text{ك }^{\text{ف}} = \text{ص} - ٤\text{ف}$$

$$(٢) \text{ بالتجدير ك } - \text{ك }^{\text{ي}} = ٢\text{ص} - ٤\text{ف}$$

$$(٣) \text{ اجمع (١) و (٢) } ٢\text{ك } = \text{ص} + ٢\text{ص} - ٤\text{ف}$$

$$(٤) \text{ اطرح (٢) من (١) } ٢\text{ك }^{\text{ي}} = \text{ص} - ٢\text{ص} - ٤\text{ف}$$

$$\text{مفروض ك } + ٢\text{ك }^{\text{ي}} + \text{ك }^{\text{ف}} = ١٩$$

$$\text{ك } + \text{ك }^{\text{ي}} + \text{ك }^{\text{ف}} = ١٢٣$$

$$\text{افرض ك } + \text{ك }^{\text{ي}} = \text{ص } \text{و } ٢\text{ك }^{\text{ي}} = \text{ف}$$

$$(١) \text{ بالتعويض ص } + \text{ف} = ١٩$$

$$(٢) \text{ ص } - \text{ف} = ١٢٣$$

$$\text{بقسمة (٢) على (١) ص } - \text{ف} = ٧ \quad \text{ك } = ٩ \quad \text{و } ٤ = \text{ك } + \text{ف}$$

وهذه الامثلة نهم بأكثر سهولة بعد درس الفصل الآتي



## الفصل الخامس عشر

في المسائل المشتملة على مجهولين فاكثر

$$١٦٢ \text{ لنفرض } ك + ١٤ = ١٤$$

$$\text{واضاً } ك - ٢ = ٢$$

$$\text{بنقل الياء فيهما لنا } ك = ١٤ - ١٤$$

$$\text{وك } ٢ = ٢ + ١٤ \text{ وحسب الاولى الحادبة عشرة ان الاشياء المساوية لشيء}$$

واحد في متساوية

$$\text{فاذا } ٢ + ١٤ = ١٤ - ١٤ \text{ وفي معادلة جديدة فيها مجهول واحد فقط . وقد}$$

استخرجناها من معادلتين في كل واحدة منها مجهولان . ولنا من ذلك

الناعدة الاولى لايخرج احد المجهولين واستخراج معادلة واحدة من اثنتين . وهي ان

نستعمل قيمة احد المجهولين في المعادلتين ونبنى المعادلة الجديدة من هاتين القيمتين

$$(١) \text{ ما عددان مجموعهما } ٢٤ \text{ والاكبر منها } ٥ \text{ مرات الاصغر}$$

$$\text{لنفرض } ك = \text{الأكبر} \text{ و } ١٤ = \text{الاصغر}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول } ك + ١٤ = ٢٤$$

$$(٢) \text{ بالشرط الثاني } ك = ٥$$

$$(٣) \text{ بمقابلة } ١٤ \text{ في الاول } ك = ٢٤ - ١٤$$

$$(٤) \text{ بالمساواة بين (٢) و (٣) } ٥ = ٢٤ - ١٤$$

$$(٥) \text{ بالمقابلة والقسمه } ١٤ = ٤$$

$$(٢) \text{ ما كيتان مجموعهما يعدل ح وفضله مربعهما تعدل د}$$

$$\text{لنفرض } ك = \text{أكبرها} \text{ و } ١٤ = \text{اصغرهما}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول } ك + ١٤ = ح$$

$$(٢) \text{ بالتاني } ك - ١٤ = د$$

$$(٣) \text{ بمقابلة } ١٤ \text{ في (٢) } ك = د + ١٤$$

$$(٤) \text{ بالتجذير } ك = \sqrt{د + ١٤}$$

$$(٥) \text{ بمقابلة } ١٤ \text{ في (١) } ك = ح - ١٤$$

(٦) بالمساواة بين (٤) و (٥)  $\frac{١٠}{٢} + ٢ = ١٠ - ٢$  فلنا

(٧)  $\frac{١٠}{٢} = ١٠ - ٢$

(٢) مفروض  $٢ + ٢ = ١٠ - ٢$

و  $١٠ = ٢ + ٢$

مطلوب قيمة  $١٠ = ٢ + ٢$  الجواب  $١٠ = ٢ + ٢$

١٦٢ مفروض  $١٠ = ٢ + ٢$

وأيضاً  $١٠ = ٢ + ٢$

نرى هنا قيمة  $١٠$  في الأولى هي  $١٠$  ويمكننا إذاً أن نفترض عن  $١٠$  في الثانية بهذه القيمة فتصير  $١٠ + ٢ = ١٠ - ٢$  وليس فيها سوى مجهول واحد. ولنا من ذلك

القاعدة الثانية لإخراج مجهول. هي أن نستعمل قيمة أحد المجهولين في إحدى المعادلتين ونفرض عنها بها في الأخرى

(٤) سنة جرت على إثر أخرى كانت قد سبقها ٢٠ ميلاً. وكانت التابعة تجري ٨ أميال كلما جرت السابقة ٧ أميال. فكم ميلاً تجري الأولى قبل أن تدرك الأخرى

لنفرض ما تجريه الأولى =  $١٠$  وما تجريه الأخرى =  $١٠$  فلنا

(١) بالشروط  $١٠ + ٢ = ١٠ - ٢$

(٢) بالشروط  $١٠ = ١٠ - ٢$

(٣) ثم  $١٠ = ١٠ - ٢$

(٤) بالتعويض عن  $١٠$  في (١)  $١٠ + \frac{٢}{٨} = ١٠ - ٢$

(٥) ولنا من ذلك  $١٦٠ = ١٠$

(٥) سئل كم عمر زيد وعبيد. فقبل منذ سبع سنين كان عمر زيد ثلاثة أمثال عمر عبيد. وبعد سبع سنين يكون عمره مضاعف عمر عبيد. فكم هو عمر عبيد

لنفرض  $١٠ =$  عمر زيد  $١٠ =$  عمر عبيد

ثم  $١٠ - ٢ = ١٠ + ٢$  زيد منذ سبع سنين

$١٠ - ٢ = ١٠ + ٢$  عبيد منذ سبع سنين

$١٠ + ٢ = ١٠ - ٢$  زيد بعد سبع سنين

$١٠ + ٢ = ١٠ - ٢$  عبيد بعد سبع سنين

(١) بالشرط الاول  $ك - ٧ = ٢ \times (٧ - ٢) = ٢١ - ٢$

(٢) بالثاني  $ك - ٧ = ٢ \times (٧ + ٢) = ٢١ + ٤$

(٣) بمقابلة الاولى  $ك - ٢ = ١٤$

(٤) بالتعويض عن ك في (٢)  $٢١ - ٢ = ٧ + ١٤$

(٥) ولنا من ذلك  $٢١ = ٢١ = ٢١$  عمر عبيد

(٦) اي عدد بين نسبة اكبرها الى اصغرهما  $٢:٣$  وجميعها يعدل مدس

الجواب ١٠ و ١٥

حاصلها

١٦٤ مفروض  $ك + ٢ = ٢١$  ت

وايضاً  $ك - ٢ = ٢١$  ب

جميع المعادلتين  $٢ = ٢١$  ت + ب

وليس فيها سوى مجهول واحد

مفروض  $٢ = ٢١$  ك + ح

وايضاً  $٢ = ٢١$  ك + د

بالطرح  $ك = ٢١ - ٢$  ح - د

فقد اخرجت ح

مفروض  $ك - ٢ = ٢١$  ت

و  $ك + ٢ = ٢١$  ب

بضرب الاولى في ٢  $٢ = ٢١$  ك - ٤ ح - د

ثم يجمع الثانية والثالثة  $٢ = ٢١$  ك + ب + ت فلنا من ذلك

القاعدة الثالثة لاجراج مجهول . في ان تضرب احدى المعادلات او قسمها حتى

يكون احد الاجزاء المشتملة على المجهول يعدل جزءاً من الاخرى . ثم يجمع المعادلتين

او تطرح الواحدة من الاخرى حتى ينفى جزء من الواحدة جزءاً من الاخرى

القاعدة الرابعة لاستخراج مجهول

(١) لنفرض  $٢ = ٢١$  ك + ح

(٢) ولنفرض  $١٠ = ٢١$  ك - ح

اضرب احدى المعادلتين في كمية غير معينة منها كانت وتلك م ولنضرب بها

الاولى منها فنضرب

$$m_2 = m_1 + k$$

اطرح منها (٢) ٥ ك - ٢ ي = ١٠

$$١٠ - م٢٢ = ٥(٢ + م٢) + ك(٥ - م٢)$$

وقد فرضنا  $m$  كمية غير معينة فلنا ان نعين لها اية قيمة شئنا فلنترض لها قيمة تجعل  $S$  أي  $(2+m) - 0$  فيصير ذلك الجزء من المعادلة صفراً وتصبح المعادلة

$$1 - p_{22} = \lambda(0 - p_{22})$$

$$(r) \quad \frac{1 - r^2}{0 - r} = d$$

وقد فُرض  $m^2 = 2$  . وبجَلّ هذه المعادلة  $m = \frac{2}{\sqrt{2}}$  عوض عن  $m$  بهذه القيمة في المعادلة (٢) فنصير

$$z = \frac{y_1}{19} = \frac{20 - 2 \times 22}{10 - 2 \times 2} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times 22}{0 - \frac{1}{2} \times 2} = -1$$

ومذه الطريقة فرنساوية قليلة الاستعمال

وهذه التواعد تستخدم لاجراء اي عدد كان من الجاهل على شرط ان عدد المعادلات المستعملة يبدل عدد الجاهل

مثال ذلك

(۱) اک + بی + سل = د

(۲) أَك + بَي + مَل = دَ

(۲) أَك + بَي + سَل = دَ

فنتخرج ك اوى اول حسب ما يوافق شروط المسئلة من ٢ و ١ فلنا  
معادلة جديدة فيها مجهولان فقط ولنعمل ذلك مع (٢) و (٣) ومع (١) و (٢) فلنا  
معادلة ثانية فيها المجهولان اللذان في المعادلة ومنها نتخرج احد المجهولين بطريق من  
الطرق المذكورة

(۷) عسکران مجمع انفارما ۲۱۱۱۰ مضاعف اکبرها مع ثلاثة امثال اصغرها  
بمعدل ۵۲۳۱۹ فكم عدد اکبرها

لفرض ك = الأكبر وى = الأصغر

(١) بالشرط الأول ك + ى = ٢١١١٠

(٢) بالتاني ٢ ك + ى = ٥٢٢١٩

(٣) اضرب (١) في ٢ ٢ ك + ى = ٦٣٣٢٠

(٤) اطرح (٢) من (٣) ك = ١١١١١

(٨) مفروض ٢ ك + ى = ١٦ و ٢ ك - ى = ٦ مطلوب قيمة ك

(١) بالفرض الأول ٢ ك + ى = ١٦

(٢) بالتاني ٢ ك - ى = ٦

(٣) اضرب (١) في ٢ ٦ ك + ى = ٤٨

(٤) يجمع (٢) و (٣) ٩ ك = ٥٤

ك = ٦

(٩) مفروض ك + ى = ١٤ وك - ى = ٢ مطلوب قيمة ى

الجواب ى = ٦

(١٠) في عمود ذي قطعتين اذا اضيف  $\frac{1}{2}$  القطعة السفلى الى  $\frac{1}{4}$  النطمة العليا

يكون المجموع ٢٨ واذا طرح ٦ امثال القطعة العليا من ٥ امثال النطمة السفلى يبقى ١٢

فاهو طول العمود

لفرض ك = النطمة السفلى ى = العليا

(١) بالشرط الأول  $\frac{1}{4} ك + \frac{1}{2} ى = ٢٨$

(٢) بالتاني ٥ ك - ٦ ى = ١٢

(٣) بضرب (١) في ٦ ٣ ك + ٣ ى = ١٦٨

(٤) بقسمة (٢) على ٦  $\frac{5}{6} ك - ى = ٢$

(٥) يجمع (٣) و (٤) ٢ ك +  $\frac{1}{6} ك = ١٧٠$

(٦) بالجبر والمجموع ١٧ ك = ١٠٢٠

(٧) بالقسمة ك = ٦٠ = السفلى

ثم بالتعويض عن ك في (٢)

١٢٠ = ى + ١٦٨ ى = ٤٨ = العليا

(١١) مطلوب كسر اذا اضيف واحد الى صورته يعدل الكسر  $\frac{1}{4}$  وان

اضيف واحد الى مخرجه يعدل الكسر  $\frac{1}{4}$

لنفرض ك = الصورة وى = المخرج

$$(١) \text{ بالشرط الأول } \frac{ك}{١} = \frac{١+ى}{١}$$

$$(٢) \text{ بالثاني } \frac{ك}{٤} = \frac{ى}{١+ى}$$

$$ك = ٤ = الصورة \quad ى = ١٥ = المخرج$$

(١٢) اى عددان نسبة فضلتهما الى مجتمعها :: ٢:٣ ونسبة مجتمعها الى حاصلها

الجواب ١٠ و ٢

٥١٣

(١٤) ما عددان حاصل مجتمعهما في فضلتهما يعدل ٥ وحاصل مجموع مربعهما

في فضلة مربعهما يعدل ٦٥

لنفرض ك = الأكبر ى = الأصغر

$$(١) \text{ بالشرط الأول } (ك + ى) \times (ك - ى) = ٥$$

$$(٢) \text{ بالثاني } (ك + ى) \times (ك - ى) = ٦٥$$

$$(٣) \text{ بضرب الاولى } ك - ى = ٥$$

$$(٤) \text{ بقسمة (٢) على (٣) } ك + ى = ١٣$$

$$(٥) \text{ يجمع (٣) و (٤) } ٢ ك = ١٨$$

$$(٦) ك = ٩ \quad ى = ٤$$

(١٤) اى عددان فضلتهما ٨ وحاصلهما ٢٤٠

(١٥) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجموع مربعهما ١٤٢٤

لنفرض أكبرهما = ك وأصغرهما = ى

$$(١) \text{ بالشرط الأول } ك - ى = ١٢$$

$$(٢) \text{ بالثاني } ك + ى = ١٤٢٤$$

$$(٣) \text{ بمقابلة ى في (١) } ك = ١٢ + ى$$

$$(٤) \text{ بتربيع الجانبين } ك^٢ = ١٤٤ + ٢٤ ى + ى^٢$$

$$(٥) \text{ بمقابلة ى في (٢) } ك^٢ - ١٤٢٤ = ى^٢$$

$$(٦) \text{ بالمساواة بين (٤) و (٥) } ى^٢ + ٢٤ ى + ١٤٤ = ى^٢ - ١٤٢٤$$

$$ى = ٢٠ \quad ك = ٣٢$$

(١٦) انقسمت تركة بين عدة ورثة بحيث كان للاول ١٠٠ غرش وعشر

الباقى. وللثاني ٢٠٠ غرش وعشر الباقى. وللثالث ٣٠٠ غرش وعشر الباقى. وللرابع

٤٠٠ غرش وعشر الباقى ولم يجرأ. فوجد ان التركة قد انقسمت بينهم بالسوية فكم

كانوا كم حصة كل واحد منهم

لفرض التركة  $ي$  وك حصة كل واحد فيكون  $\frac{ي}{١٠}$  حصة الورثة

$$\frac{١٠٠ - ي}{١٠} + ١٠٠ = ك$$

ويبقى  $ي - ك$

$$\frac{٢٠٠ - ك - ي}{١٠} + ٢٠٠ = ك$$

ويبقى  $ي - ٢ ك$

$$\frac{٣٠٠ - ك - ٢ ي}{١٠} + ٣٠٠ = ك$$

وملم جراً وبطرح حصة الأول من حصة الثاني

$$\text{لنا } ١٠٠ - \frac{ك}{١٠} = ١٠٠ - \frac{١٠٠ - ي}{١٠} \text{ وهكذا ان طرح الثاني من الثالث والثالث من}$$

الرابع ولملم جراً

$$\text{فلنأخذ هذه المعادلة } ١٠٠ - \frac{ك}{١٠} = ١٠٠ - \frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

$$ك = ١٠٠ - \frac{١٠٠ - ي}{١٠} \text{ ثم بالتعويض عن ك لنا } ١٠٠ - ٩٠٠ = ١٠٠ - \frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

$$ي = ٨١٠٠ \text{ التركة } \frac{ي}{١٠} = ٨١٠ = \text{عدد الورثة}$$

(١٧) اي عدد من فضلها ١٥ ونصف حاصلها يعدل كمب اصغرها

الجواب ١٨ و ٢

(١٨) اي عدد من مجتمعا ١٠٠ وحاصلها ٢٠٥٩ الجواب ٧١ و ٢٩

(١٩) قسم ٢٦ الى ثلاثة اقسام بحيث يزيد كل قسم على ما قبله اربعة ويكون

الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

مجتمع من يعاها ٤٦٤

(٢٠) قال حمار لبغل لو زيد على حملي رطل من حملك لكانت وزنة

مضاعف وزن حملك . فقال البغل ولو زيد على حملي رطل من حملك لصار ثلاثة

امثال حملك . فكم رطلا كانا حاملين

ك = البغل  $ي$  = الحمار

لو زيد على حمل الحمار رطل من حمل البغل لكان  $ي + ١$  وبقي للبغل ك - ١

وكان حمل الحمار مضاعف حمل البغل اي  $٢ = ١ + ي$  ك - ٢

وان زيد على حمل البغل لنا ك + ١ = ٢ - ي

$$ك = ٢\% \quad ي = ٢\%$$

$$١٦٥ \text{ مفروض } ك + ي + ل = ١٢$$

$$\text{وأيضاً } ك + ي - ل = ١٠$$

$$\text{وأيضاً } ك + ي - ل = ٤$$

علينا ان نجد قيمة ك وى ول

بالمقابلة لنا من الاولى ك = ١٢ - ي - ل

من الثانية ك = ١٠ - ي - ل

من الثالثة ك = ٤ - ي - ل

بالمساواة بين الاولى والثانية وبين الثانية والثالثة لنا

$$١٢ - ي - ل = ١٠ - ي - ل$$

$$\text{وأيضاً } ١٠ - ي - ل = ٤ - ي - ل$$

بالمقابلة لنا من الاولى ك = ٢ - ل

ومن الثانية ك = ٦ + ل

بالمساواة بين هاتين ٢ - ل = ٦ + ل

وذلك حسب القاعدة لحل مسئلة فيها ثلاث مجهولات فأكثر المذكورة آنفاً

اي ان نستخرج من المعادلات الثلاث معادلتين فيها مجهولان فقط . ونستخرج

من هاتين واحدة فيها مجهول واحد فقط

$$(٢١) \text{ مفروض } (١) \text{ ك } + ٥ + ل = ٥٢$$

$$\text{أيضاً } (٢) \text{ ك } + ي + ل = ٢٠$$

$$\text{أيضاً } (٣) \text{ ك } + ي + ل = ١٢$$

المطلوب قيمة ك وى ول

$$(١) \text{ بطرح الثانية من الاولى } ٢٢ = ل + ي$$

$$(٥) \text{ بطرح (٢) من (٣) } ١٨ = ل + ي$$

$$(٦) \text{ بطرح (٥) من (٤) } ٥ = ل$$

ثم لكي نجد ك وى نعوض عن ل بقيمتها ونحول المعادلات كما تقدم

$$\text{فلما في (٥) } ١٨ = ٥ + ل \quad ١٨ - ٥ = ل$$

$$\text{وفي (٦) } ١٢ = ٥ + ل \quad ١٢ - ٥ = ل$$

(٢٢) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات الثلاث



- (١) مفروض ك + ي + ل = ١٢  
 (٢) ايضاً ك + ي + ل = ٢٠  
 (٣) ايضاً  $\frac{1}{2}ك + \frac{1}{2}ي + ل = ٦$   
 (٤) اضرب الاولى في ٢  $٢ك + ٢ي + ٢ل = ٢٦$   
 (٥) اطرح (٢) من (٤)  $٢ك + ٢ي = ١٦$   
 (٦) اطرح (٣) من (١)  $\frac{1}{2}ك + \frac{1}{2}ي = ٦$   
 (٧) بالبحر  $٢ك + ٢ي = ٢٦$   
 (٨) اضرب (٥) في ٢  $٤ك + ٤ي = ٤٨$   
 (٩) بطرح (٧) من (٨)  $٢ك = ١٢$  ك = ٦  
 (١٠) بنحويل (٧)  $٤ي = ٢٠$  ي = ٥  
 (١١) بنحويل (١)  $٢ل = ٢٠$  ل = ١٠  
 (١٢) مفروض ك + ي = ت  
 (١٣) ك + ل = ب  
 (١٤) ي + ل = س

مطلوب ك وي ول  
 الجواب ك =  $\frac{ت + ب - س}{٢}$  ي =  $\frac{ت + س - ب}{٢}$  ل =  $\frac{ب + س - ت}{٢}$

(٢٤) زيد وعبد وبكر تشاركوا في شراء فرس ثمنه مئة دينار فلو أخذ ماع زيد ونصف ماع عبيد كان المجمع ثمن الفرس. ولو أخذ ماع عبيد وثلاث ماع بكر لكان المجمع ثمن الفرس. ولو أخذ ماع بكر وربع ماع زيد لكان المجمع ثمن الفرس. فكم كان مع كل واحد منهم

لنفرض ك = زيد ي = عبيد ل = بكر

(١) بالشروط الاول  $ك + \frac{1}{2}ي = ١٠٠$

(٢) بالثاني  $ي + \frac{1}{4}ل = ١٠٠$

(٣) بالثالث  $ل + \frac{1}{4}ك = ١٠٠$

ك = ٦٤ ي = ٧٢ ل = ٨٤

(٢٥) ثلاثة رجال اشتروا كرمًا بمئة دينار. فلو أخذ ماع الاول ونصف ماع الثاني كان المجمع ثمن الكرم. ولو أخذ ماع الثاني وثلاث ماع الثالث كان المجمع ثمن الكرم. ولو أخذ ماع الثالث وربع ماع الاول كان المجمع ثمن الكرم. فكم ديناراً مع كل واحد منهم الجواب الاول = ٦٤ الثاني = ٧٢ الثالث = ٨٤ ديناراً

(٢٦) ملك هندة ثلاث كنائب من العساكر احلما اترك والثانية عرب  
والثالثة اعجم. فامر ان يقيم احدى الطوائف على قلعة ووعد ان يعطي الجميع ٢٠١  
من الدنانير غير انه يعطي كل نفر من الطائفة الهاجرة ديناراً واحداً ويوزع ما بقي على  
الطائفتين الاخرتين بالمساواة. فلو هجمت الاتراك لاصاب كل نفر من الاخرين نصف  
دينار. ولو هجمت العرب لاصاب كل نفر من الاخرين ثلث دينار. ولو هجمت الاعجم  
لاصاب كل نفر من الاخرين ربع دينار. فكم نفراً كان في كل طائفة

لنفرض الاتراك = ك والعرب = ي والاعجم = ل

ولنفرض ك + ي + ل = س اي مجموع الثلاثة. فان هجمت الاتراك فلنا البقية  
= س - ك وللاتراك دينار واحد لكل نفر. وللبقية نصف دينار لكل نفر اي ك +  
 $\frac{1}{2}$  س -  $\frac{1}{2}$  ك = ٢٠١ وان هجمت العرب فلنا ي +  $\frac{1}{2}$  س -  $\frac{1}{2}$  ي = ٢٠١ وان  
هجمت الاعجم فلنا ل +  $\frac{1}{4}$  س -  $\frac{1}{4}$  ل = ٢٠١

ك = ٢٦٥      ي = ٥٨٢      ل = ٦٨٢

(٢٧) زيد عمرو وبكر سافروا الى جهات مختلفة. وكان مجموع اسفارهم ٦٢  
ميلاً. وكان سفر زيد اربعة امثال سفر بكر مع مضاعف سفر عمرو. و١٧ مثل سفر  
بكر تعدل مضاعف سفر زيد مع ثلاثة امثال سفر عمرو. فكم ميلاً سافر كل واحد منهم

زيد = ٤٦      عمرو = ١      بكر = ٧

(٢٨) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

$$\frac{1}{2} ك + \frac{1}{4} ي + \frac{1}{8} ل = ٦٢$$

$$\frac{1}{4} ك + \frac{1}{8} ي + \frac{1}{16} ل = ٤٧$$

$$\frac{1}{8} ك + \frac{1}{16} ي + \frac{1}{32} ل = ٢٨$$

الجواب ك = ٢٤      ي = ٦٠      ل = ١٢٠

(٢٩) مفروض كى = ٦٠٠      ك ل = ٢٠٠

ل = ٢٠٠      مطلوب قيمة ك وى ول وى

ك = ٢٠      ي = ٢٠      ل = ١٠

١٦٦ على هذه الكيفية تحل اربع معادلات فاكتر. اي يستخرج من الاربع ثلاثاً  
ومن الثلاث اثنين وملم جراً

(٣٠) مطلوب قيمة ك وى ول وى من هذه المعادلات

اربع معادلات	$\frac{1}{2}ي + ل + \frac{1}{2}ن = ٨$	(١) مفروض
	$ك + ي + ن = ٩$	(٢) مفروض
	$ك + ي + ل = ١٢$	(٣) مفروض
	$ك + ن + ل = ١٠$	(٤) مفروض
ثلاث معادلات	$١٦ = ي + ل + ن$	(٥) مجبر الاولى
	$٢ = ن - ل$	(٦) بطرح (٢) من (٢)
	$٢ = ن - ي$	(٧) بطرح (٤) من (٢)
معادلتان	$١٩ = ي + ل$	(٨) يجمع (٥) و (٦)
	$١ = ي + ل -$	(٩) بطرح (٧) من (٦)
الكلمات المطلوبة	$٥ = ل \quad ٢٠ = ي$	(١٠) يجمع (٨) و (٩)
	$٤ = ل - ١٩ = ي$	(١١) بمقابلة (٨)
	$٢ = ل - ي - ١٢ = ك$	(١٢) بمقابلة (٢)
	$٢ = ن - ك - ي$	(١٣) بمقابلة (٢)
مطلوب ك و ي ول ون	$٥٠ = ن + ك$	(١٤) مفروض
	$٢ = ١٢٠ + ك$	
	$٢ = ١٢٠ + ي$	
	$٢ = ١٩٥ + ل$	

$$١٠٠ = ن \quad ١٥٠ = ك \quad ٩٠ = ي \quad ١٠٥ = ل$$

(٢٢) مطلوب عدد ذور قبت احدهما في منزلة الآحاد والآخر في منزلة العشرات. والذي في منزلة العشرات يعدل ثلاثة امثال الآخر. واذا طُرِحَ ١٢ من العدد نفسه يعدل الباقي منه مربع الرقم الذي في منزلة العشرات لنفرض ك = الذي في منزلة العشرات وي = الذي في منزلة الآحاد. فوقع ك في منزلة العشرات بزيادة عشرة امثال ما كان لو وقع في منزلة الآحاد. فلنا

$$١٠ + ك = العدد$$

وبشروط المسئلة ك = ٢ ي

وايضاً ١٠ + ك + ي - ١٢ = ك

$$٩٢ = ك$$

(٢٣) مطلوب ثلاثة اعداد يكون الأول مع نصف الآخرين ٢٤ والثاني مع ثلث

الآخرين ٢٤ والثالث مع ربع الآخرين ٢٤ الجواب ١٠ و ٢٢ و ٣٦

(٢٤) مطلوب عدد ذو رقمين مجموعها ١٥ وإذا أضيف ٢١ الى حاصلها

تنقلب رتبة الرقمين اي الذي كان في منزلة الآحاد يصير في منزلة العشرات وبالعكس

الجواب ٧٨

(٢٥) اي عدد ذي رقمين اذا انقسم على حاصل رقمين يخرج اثنان. وإذا أضيف

٢٧ الى العدد نفسو تنقلب رتبة رقميه الجواب ٢٦

(٢٦) ما عددان اذا طُرِحَ الاصغر من ثلاثة امثال الاكبر بقي ٢٥ وإذا انقسم

اربعة امثال الاكبر على ثلاثة امثال الاصغر مع واحد يكون الخارج نفس العدد الاصغر

الجواب ١٢ و ٤

(٢٧) اي كسر اذا أضيف ٢ الى صورته تكون قيمته  $\frac{1}{4}$  وإذا طُرِحَ واحد من

مخرجيه تكون قيمته  $\frac{1}{21}$  الجواب  $\frac{2}{21}$

(٢٨) رجل له فرسان وسرج قيمته ١٠ دنانير. فاذا وُضِعَ السرج على الفرس

الأول تكون قيمته مضاعف قيمة الفرس الثاني. وإذا وُضِعَ على الثاني تكون قيمته اقل

من قيمة الأول بثلاثة عشر ديناراً. فكم قيمة الفرسين الجواب ٥٦ و ٢٢ ديناراً

(٢٩) اقسم ٢٠ الى اربعة اقسام بحيث اذا أضيف الى الأول ٢ وطُرِحَ من

الثاني ٢ وضُرب الثالث في ٢ وانقسم الرابع على ٢ تكون الاقسام كلها متساوية

لفرض ثلاثة اقسام ك وى ول فيكون الرابع ٢٠ - ك - ي - ل

$$\text{فلما ك} + ٢ = \text{ى} - ٢$$

$$\text{و ك} + ٢ = \text{ل}$$

$$\text{و} \frac{٢٠ - \text{ك} - \text{ى} - \text{ل}}{٢} = \text{ل}$$

الجواب ١٨ و ٢٢ و ١٠ و ٤٠

(٤٠) ما ثلاثة اعداد يكون الأول منها مع نصف مجموع الثاني والثالث ١٢٠

والثاني مع  $\frac{1}{3}$  فضلة الثالث والأول ٧٠ ونصف مجموع الثلاثة ٢٥

(٤١) ما عددان النسبة بين فضلتهما ومجموعهما وحاصلهما كالنسبة بين ٢ و ٢٥

الجواب ١٠ و ٢

(٤٢) رجل باع ٢٠ رطلاً من الخمر الاسود و ٢٠ رطلاً من الاصفر وكان ثمن

الجميع ١٢٠ غشاً. ثم باع ٢٠ رطلاً من الاسود و ٢٥ رطلاً من الاصفر بالسعر الأول

ويبلغ ثمن الجميع في المرة الثانية ١٤٠ غرشاً . فكم كان ثمن الرطل من كل صنف  
 الجواب الأسود = ٢ غروش والاصفر = غرشين  
 (٤٢) رجل مزج خمراً بماء ولو زاد من كل صنف ٦ ارطال لكان في المزيج  
 ٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء . ولو نقص من كل صنف ٦ ارطال  
 لكان في المزيج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماء . فكم رطلاً مزج من كل صنف  
 الجواب الخمر = ٧٨ والماء = ٦٦ رطلاً  
 (٤٤) اي كسر اذا تضاعفت صورته واُضيف ٧ الى مخرجه تكون قيمته  $\frac{1}{2}$  واذا  
 تضاعف المخرج واُضيف ٢ الى صورته تكون قيمته  $\frac{1}{2}$  الجواب  $\frac{1}{2}$   
 (٤٥) رجل اشترى من التفاح والليمون ثلاثين غرشاً . وكان كل اربع تفاحات  
 بغرش وكل خمس ليمونات بغرش ايضاً . ثم باع نصف التفاح و  $\frac{1}{3}$  الليمون بسعرهما  
 اشترى فبلغ الثمن ١٢ غرشاً فكم اشترى من كل صنف

الجواب التفاح = ٧٢ والليمون = ٦٠  
 (٤٦) استعلم مال كل واحد من ثلاثة اشخاص ا وب و ت على افتراض  
 (١) ان مال ا مع ل مرة مال ب و ت = ف (٢) ان مال ب مع م مرة  
 مال ا و ت = ق (٣) ان مال ت مع ن مرة مال ا وب = ر  
 افرض مجتمع مال ا وب و ت = ص

$$\frac{ل}{١-ل} = \frac{ف}{١-م} = \frac{ق}{١-ن} = \frac{ر}{١-٠}$$

(٤٧) استعلم قيمة رزق كل واحد من ستة اشخاص ا ب ت ث ج ح على  
 افتراض (١) ان مجتمع رزق ا وب = د ومجتمع رزق ت و ث = س ومجتمع  
 رزق ج و ح = ص (٢) ان رزق ا = م مرة رزق ت و رزق ت = ن مرة  
 رزق ج و رزق ح = ف مرة رزق ت  
 هذه المسئلة تحل بجهول واحد وبسته مجاميل

١٦٧ متى وُجد ك أي أوكى في كل جزء من المعادلتين تكونان على  
 احدي هاتين المهمتين ت ك + ب كى + س ي = د  
 ت ك + ب كى + س ي = د  
 ولحلها افرض ك = ف ي اذا ك = ف ي  
 وبالتعويض عن ك وك في المعادلتين لنا

$$\begin{aligned} \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} &= \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} \\ \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} &= \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} \end{aligned}$$

وبالمساواة بين هاتين لنا

$$\begin{aligned} \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} &= \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} \text{ اي} \\ (\text{ث د} - \text{ث د}) + (\text{ف د} - \text{ف د}) + (\text{س د} - \text{س د}) &= 0 \text{ وهي معادلة} \\ \text{مربعة محل}^{\text{١}} \text{ باتمام التريع كما تقدم} \end{aligned}$$

$$(1) \text{ مفروض } 20 = \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} = 20$$

$$41 = \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي}$$

$$\text{افرض ك} = \text{ث ف ي}$$

$$20 = \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} = 20$$

$$41 = \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي}$$

$$\text{ثم بالمساواة} \frac{20}{41} = \frac{\text{ث ف ي}}{\text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي}}$$

$$6 \text{ ف} - 41 \text{ ف} = 12 \text{ ف} \quad \text{ف} = \frac{12}{47} \text{ او } \frac{1}{4}$$

$$\text{ثم بالتعويض عن ف لنا}$$

$$\text{ف} = \frac{1}{4} \quad \text{ث ف ي} = \frac{1}{4} = \frac{12}{47} = \frac{12}{47} = \frac{12}{47} = \frac{12}{47}$$

$$\text{ك} = \text{ث ف ي} = \frac{1}{4} \times 20 = 5$$

$$(2) \text{ ما عددان اذا ضرب مجتمعهما في اكبرها يحصل 77 واذا ضربت فضلها}$$

$$\text{في اصغرهما يحصل 12}$$

$$\text{افرض ك} = \text{اكبرها وى} = \text{اصغرهما}$$

$$\text{فلنا ك} + \text{ك} = 77$$

$$\text{و كى} - \text{ك} = 12$$

$$\text{افرض ك} = \text{ث ف ي} \quad \text{فلنا ف ي} + \text{ث ف ي} = 77 \quad \text{ث ف ي} = \frac{77}{2}$$

$$\text{وايضاً ف ي} - \text{ث ف ي} = 12 \quad \text{ث ف ي} = \frac{12}{2}$$

$$\text{بالمساواة} \frac{77}{2} = \frac{12}{2} \quad \text{ف} = \frac{12}{77} \text{ او } \frac{1}{6}$$

$$\text{ك} = 7$$

$$(3) \text{ اي عددان فضلته مربعيهما 56 ومجموع مربع اصغرهما مع } \frac{1}{4} \text{ حاصلها 40}$$

$$\text{الجواب 9 و 5}$$

$$(4) \text{ اي عددان ثلاثة امثال مربع اكبرهما مع مضاعف مربع اصغرهما 110}$$

ولصف حاصلها مع مربع الاصغر = ٤ الجواب ٦ و ١

١٦٨ متى ترقى المجهولان الى قوة واحدة لا تفعل المعادلة حسباً قدّم بل تستعمل طريقة اخرى نوضحها هنا وعليها تفعل كل مسألة واثمة تحت هذه القضية . وهي مفروض مجتمع عددين ومجتمع القوة التوتية منها علينا ان نجد العددين على شرط ان لا يتجاوز القوة التاسعة

مفروض كيمان اكبرهما ك واصفرها ي

مفروض ايضاً ك + ي = ٢ س ك - ي = ٢ ل

ثم بالجمع ك = س + ل وبالطرح ي = س - ل

ثم لنفرض ك + ي = ت ك + ي = ب

ك + ي = ر ك + ي = د ولمّا جراً فنجد قيمة ك وى في اجزاء من

المطلوبات ت ب ر د س على هذا الاسلوب

(١) ك = (س + ل) = ٢ س + ٢ ل + ل

ي = (س - ل) = ٢ س - ٢ ل + ل

بالجمع ك + ي = ت اي ت = ٢ س + ٢ ل ل = ت - ٢ س

ل =  $\frac{ت - ٢ س}{٢}$  فلنا قيمة ك وى اي ك = س +  $\frac{ت - ٢ س}{٢}$  ي = س -  $\frac{ت - ٢ س}{٢}$

(٢) ك = (س + ل) = ٢ س + ٢ ل + ل + ل

ي = (س - ل) = ٢ س - ٢ ل - ل - ل

ك + ي = اي ٢ س + ٢ ل + ل + ل = ٢ س - ٢ ل - ل - ل

ل =  $\frac{٢ س - ٢ ل - ل - ل}{٢}$  ل =  $\frac{٢ س - ٢ ل - ل - ل}{٢}$

فلنا قيمة ك وى بالتعويض اي

ك = س +  $\frac{٢ س - ٢ ل - ل - ل}{٢}$  ي = س -  $\frac{٢ س - ٢ ل - ل - ل}{٢}$

(٣) ك = (س + ل) = ٢ س + ٢ ل + ل + ل + ل + ل

ي = (س - ل) = ٢ س - ٢ ل - ل - ل - ل - ل

ك + ي = اي ٢ س + ٢ ل + ل + ل + ل + ل = ٢ س - ٢ ل - ل - ل - ل - ل

فلنا قيمة ك وى بالتعويض اي ك = س +  $\frac{٢ س - ٢ ل - ل - ل - ل - ل}{٢}$  ي = س -  $\frac{٢ س - ٢ ل - ل - ل - ل - ل}{٢}$

كما قدّم ثم يعوض بها عن ك وى

(٤) ك = (س + ل) = ٢ س + ٢ ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل

س + ل + ل

$\text{ئ} = (\text{س} - \text{ل}) = \text{س} - \text{ه} + \text{ل} = ١٠\text{س} - ١٠\text{ل} + \text{ل}$   
 $\text{ه} = \text{ل} - \text{ك} + \text{ي} = \text{د} = ٢٠\text{س} + ١٠\text{ل} - \text{ي}$  وفي معادلة  
 مربعة نُستعلم منها قيمة ل ثم قيمة ك وي كما تقدم

١٦٩ مفروض ك + ي = ٢س وك - ي = ٢ل

ثم لنرض  $\frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ا} = \frac{ت}{ا}$   $\frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = \frac{ب}{ب}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

ثم بواسطة المعادلات المتقدمة (١٦٨) نجد قيمة  $K$  وى في اجزاء من المعلومات

س تَابَرَدَ

$$(1) \quad \text{ك} + \frac{\text{ي}}{ا} - \text{ت} = \text{ك} + \frac{\text{ي}}{ا} = \text{ك ي} = \text{ث ك} = \text{ي} - \text{ت} \times (\text{س} + \text{ل}) \times (\text{س} - \text{ل})$$
$$= (s_1 - s_2) \times t$$

وحسب (١٦٨) (١) لنا  $ك' + ي' = س' + ل'$

فإذا  $t_s - t_l = r_s + r_l$

$$\frac{(n-1)s^2}{n} = J \quad \frac{(n-1)s^2}{n} = J$$
$$\frac{(2-1)}{2} + 1 = 1$$

ی = س - م (ن - ۲) س

$$(1) \quad \bar{b} = \frac{1}{4} \bar{y} + \frac{1}{5} \bar{k} \quad \bar{b} = \bar{k} + \bar{y} \quad \bar{k} = \bar{b} - (\bar{m} - \bar{l})$$

حسب (۱۶۸) (۲) لاءِ  $ك + ع - س + س + ل$  اي پ (س - ل)

$$= 2s + 6s^2$$
$$\text{نم ل} - \frac{(ب-س)س}{س+ب} - \text{ل} - \frac{(ب-س)س}{س+ب}$$

ك = س + م       $\frac{(ب - س) م}{س + م}$       ي = س - م       $\frac{(ب - س) م}{س - م}$

$$(۲) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{و} \quad r = r_1 - r_2$$

ثم حسب (١٦٨) (٢) لنا

$$k^2 + \frac{1}{2} = k^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = k^2 - \frac{1}{2} + 1 = k^2 + \frac{1}{2}$$
$$r(s - s') = s^2 + s' + s'^2 + s'^2 + s'^2$$

منها قيمة ل وكذلك قيمة ك وى حسبما تقدم

$$\text{د} = \frac{\text{ك}}{\text{ي}} + \frac{\text{ي}}{\text{ا}} \quad \text{ك} + \text{ي} = \text{د} \text{ك ي} = \text{د} (\text{س} - \text{ل}) \quad (6)$$

وحسب (١٦٨) (٤) لنا  $ك' + ي' = ٢٠ + ١٠ = ٣٠$  اذا



٢ من ٢٠ + ل من ١٠ + ل = د (س - ل) وفي معادلة مربعة تستعمل  
منها قيمة ل كما تقدم

١٧٠ مفروض ك + ي = س ك ي = ف

فجد قيمة اية قوة فُرِضَتْ من ك وى في اجزاء من المعلومين س وف هكذا

$$(١) \text{ ك } + ٢ \text{ ك ي } + ٢ \text{ ي } = \text{س}$$

$$\text{ك } + \text{ ي } = \text{س} - ٢ \text{ ك ي} - \text{س} - ٢ \text{ ف}$$

$$(٢) (\text{ك } + \text{ ي }) (\text{ك } + \text{ ي}) = (\text{ك } + \text{ ي}) (\text{س} - ٢ \text{ ف}) \times \text{س}$$

$$\text{ك } + \text{ ي } + \text{ ك ي } (\text{ك } + \text{ ي}) = \text{س} - ٢ \text{ ف س} \quad \text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ف س} = \text{س} - ٢ \text{ ف س}$$

$$(٣) (\text{ك } + \text{ ي }) (\text{ك } + \text{ ي}) = (\text{ك } + \text{ ي}) (\text{س} - ٢ \text{ ف س})$$

$$\text{ك } + \text{ ي } + \text{ ك ي } (\text{ك } + \text{ ي}) = \text{س} - ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ف} (\text{س} - ٢ \text{ ف}) = \text{س} - ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } = \text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف}$$

$$(٤) (\text{ك } + \text{ ي}) (\text{ك } + \text{ ي}) = (\text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف}) (\text{س})$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ك ي } (\text{ك } + \text{ ي}) = \text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ف} (\text{س} - ٢ \text{ ف س}) = \text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{ك } + \text{ ك } = \text{س} - ٥ \text{ ف س} + ٥ \text{ ف س}$$

$$\text{ومطلقاً} \quad \text{ك } + \text{ ي } = \text{س} - \text{ن ف س} + \text{ن} \left( \frac{\text{ف} - \text{ن}}{\text{ف}} \right) \text{ ف س} \quad \text{الى آخره}$$

مثال (١) ما عددان مجموعهما ٦ ومجموع قوتيهما الخماسين ١٠٥٦

انظر (١٦٨) (٤)

$$\text{س} = ٢ = د = ١٠٥٦ \quad \text{فلنا لكي نجد قيمة ل}$$

$$\text{س} = ٢٠ = \text{س} + \text{ل} + ١٠ = \text{ل} = د \quad \text{اي}$$

$$١٠٥٦ = ٤٨٦ + ٥٤٠ + \text{ل} + ٢٠ = \text{ل}$$

$$\text{ل} = ١٨ + ١٩ = \text{ل} = ١$$

$$\text{ك} = \text{س} + \text{ل} = ١ + ٢ = ٤ \quad \text{ي} = \text{س} - \text{ل} = ١ - ٢ = -١$$

(٢) ما عددان مجموعهما ١٨ ومربع الأكبر على الأصغر مربع الأصغر على

الأكبر = ٢٧

$$\text{انظر (١٦٩) (٢) س} = ١ = ب = ٢٧$$

$$\begin{aligned}
 \text{ل} &= \frac{1}{2} \left( \frac{2 - 3}{6 + 7} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{13} \right) = -\frac{1}{26} \\
 \text{ك} &= \text{س} + \text{ل} = 12 - 2 = 10 \quad \text{س} = \text{ل} - 1 = 11 - 1 = 10 \\
 (2) \quad &\text{عددان مجموعهما ٥ وحاصلهما ٦ فهو مجموع قوتيهما الرابعتين} \\
 &\text{انظر (١٧٠) (٢)} \\
 \text{ك} + \text{س} &= 10 - 4 = 6 \quad \text{س} + 2 = 12 - 2 = 10 \quad 17 = 72 + 60 - 620
 \end{aligned}$$

١٧١ متى كانت المعادلات الناتجة من مسألة أكثر من عدد المجهولات المتضمنة فيها تكون بعضها اما متناقضة واما فضولاً. فمثال المتناقضة ٢ ك = ٦٠ / ٢ ك = ٣٠ لان بالاولى ك = ٢٠ وبالثانية ك = ٤٠ ولو غيّرنا الثانية حتى تصير ١٠ ك = ١٠ لكانت فضولاً لان قيمة ك تُستعمل بدونها. وإن كان عدد المعادلات أقل من عدد المجهولات في المسئلة تكون المسئلة سيالة اي اجوبتها كثيرة. وسما في الكلام على بعض انواع هذه المسائل في محله

١٧٢ في حل المسائل المتضمنة عدّة مجاهيل التعلم باب واسع لاستعمال فطنته في اختراع طرق لتسهيل العمل. وهذه الطرق لا تنحصر في قواعد مطلوبة

$$(1) \quad \text{فلو قُرض} \quad 13 = \text{س} + \text{ك} + \text{م} + \text{ل} + \text{ي}$$

$$(2) \quad \text{م} + \text{ك} + \text{ل} = 17$$

$$(3) \quad \text{م} + \text{س} + \text{ل} = 18$$

$$(4) \quad \text{ك} + \text{س} + \text{ل} = 21$$

فلنفرض مجموع المجاهيل اي ك + س + م + ل = س

ثم في الاولى نجد الجميع الا ل اي س - ل = 13

في الثانية نجد الجميع الا ي اي س - ي = 17

في الثالثة نجد الجميع الا ك اي س - ك = 18

في الرابعة نجد الجميع الا م اي س - م = 21

بالجميع ٤ س - ل - ي - ك - م = 69

اي ٤ س - (ل + ي + ك + م) = 69

اي ٤ س - س = 69 ٦٩ = س ٢٣ = س

$$\begin{array}{ll} \text{ثم بالتعويض } ٢٣ - \text{ل} = ١٢ & \text{ل} = ١٠ \\ ٢٣ - \text{ي} = ١٧ & \text{ي} = ٦ \\ ٢٣ - \text{ك} = ١٨ & \text{ك} = ٥ \\ ٢٣ - \text{م} = ٢١ & \text{م} = ٢ \end{array}$$

براهين على نظريات بالمعادلات

١٧٣ في ما تقدم استخدمنا المعادلات لحل مسائل عملية . وفي نعمل ايضاً في برهان النظريات كما ترى هنا

نظرية اولى . اربعة امثال حاصل كيتين يعدل مربع مجتمعهما الا مربع فضلتهما  
لتفرض اكبرها = ك      اصغرها = ي  
مجتمعهما = س      فضلتهما = د

(١) بالشروط ك + ي = س      (٢) ك - ي = د

(٣) بالجمع ٢ ك = س + د

(٤) بالطرح ٢ ي = س - د

(٥) بضرب (٣) في (٤) ٤ ك ي = س<sup>٢</sup> - د<sup>٢</sup>

نظرية ثانية . مجموع مربعي كيتين يعدل مربع فضلتهما مع مضاعف حاصلهما

لتفرض ك = الأكبر      ي = الأصغر  
د = فضلتهما      ف = حاصلهما

(١) بالشروط ك - ي = د      (٢) ك ي = ف

(٣) بتربيع الاولى ك<sup>٢</sup> - ٢ ك ي + ي<sup>٢</sup> = د<sup>٢</sup>

(٤) بضرب الثانية في ٢ ٢ ك ي = ٢ ف

(٥) بجمع هاتين ك<sup>٢</sup> + ي<sup>٢</sup> = د<sup>٢</sup> + ٢ ف

نظرية ثالثة . نصف فضلة كيتين مع نصف مجتمعهما يعدل اكبرها . ونصف

مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

لتفرض (١) ك + ي = س      (٢) ك - ي = د

(٣) بالقسمة على ٢ ١/٢ ك + ١/٢ ي = ١/٢ س

(٤) ايضاً ١/٢ ك - ١/٢ ي = ١/٢ د

(٥) بجمع هاتين ك = ١/٢ س + ١/٢ د

(١) بطرحها  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}d$   
وقس على ذلك نظائر

في القيمة السلبية التي نخرج من حل معادلة

(١) المطلوب عدد اذا أضيف الى  $b = 1$

لنفرض  $k =$  العدد المطلوب ثم  $k + b = 1$   $k = 1 - b$

وهذه العبارة العامة تدل على قيمة  $k$  في كل مسألة خصوصية من هذا النوع . مثاله

لنفرض  $1 = 47$  و  $b = 29$

فحيث  $k = 47 - 29 = 18$

ثم لنفرض  $1 = 24$  و  $b = 21$  فحيث  $k = 24 - 21 = 3$

أي قيمة  $k$  سلبية وكيفية سلبية مجردة ليس لها وجود أي  $7 -$  مجردة لوجود لها

ولكنها موجودة جبرياً أو نسبياً وإذا أضيف  $7 -$  الى  $21$  جبرياً يكون المجموع  $24$

وذلك يستوفي شروط المسئلة ونصح بها المعادلة ويمكننا تركيب مسئلة جبرية (لا مجردة)

توافق هذه الشروط فإذا فرضنا ان مجموع مال شخصين  $= 120$  درهماً ومال الواحد

منها  $160$  درهماً أكثر من مال الآخر فما هو مال كل واحد منها

الجواب  $= 140$  درهماً و  $20$  درهماً ولكن  $20 -$  لوجود لما فيؤخذ على معنى

الدين الذي علامته عكس علامة ما في اليد

(٢) رجل عاش سنين  $1$  وابنة عاش سنين  $b$  . في كم سنة يكون عمر

الابن  $\frac{1}{4}$  عمر الاب

لنفرض  $k =$  السنين المطلوبة

ثم  $1 + k =$  عمر الاب عند نهاية المدة المطلوبة

$b + k =$  عمر الابن عند نهاية المدة المطلوبة

ثم بشروط المسئلة  $\frac{1+k}{4} = b + k$   $k = \frac{b-1}{3}$

فلنفرض  $1 = 54$  و  $b = 9$  ثم  $k = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

فإذا كان عمر الاب  $54$  سنة وعمر الابن  $9$  سنين بعد  $2\frac{2}{3}$  سنين يكون عمر الاب

$60$  سنة وعمر الابن  $15$  سنة وه اربع  $60$  أي

$k = 6$  يستوفي شروط المسئلة

ثم لنفرض  $1 = 45$  و  $b = 15$  ثم  $k = \frac{15-1}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

فاذا عوّضنا عن ك بهذه القيمة في المعادلة السابقة أي  $\frac{1}{4} + ك = ب + ك$  نصير  
 $\frac{٤٥}{٤} - ١٥ = ٥ - ك$  أي  $ك = ١٠$  فقيمة ٥ يستوفي شروط المعادلة كما ان قيمة  
 $٦ +$  يستوفي شروط المسئلة فالجواب الإيجابي يدل على ان عمر الأب يكون أربعة امثال  
 عمر الابن بعد ٦ سنين والجواب السليبي يدل على ان عمر الأب كان ٤ امثال عمر  
 الابن قبل بخمس سنين فالمسئلة تطلب الوقت الذي فيه يكون عمر الأب ٤ امثال عمر  
 الابن وعدد افتراض المسئلة لاجل اصطناع المعادلة ففرض ذلك الوقت مستقبلاً  
 وبالاقتراض الثاني انتقض ان يكون ذلك الوقت قد مضى ودلت على ذلك العلامة  
 السلية في الجواب

ولاجل تحصيل جواب ايجابي بالاقتراض الثاني نغير المسئلة أي بنال كم سنة  
 مضت منذ كان عمر الأب ٤ امثال عمر الابن فان فرضنا  $ك =$  السنين المطلوبة لنا  
 بشروط المسئلة

$$\frac{١-ك}{٤} = ب = ك \text{ وك } \frac{٤-ب}{٣} = ١ - ٥ \text{ وان فرض } ك = ٤٥ \text{ وب } ١٥ = ك$$

(٢) رجلٌ عند ما تزوّج كان عمره ٢٠ سنة وعمر امرأته ١٥ سنة فبعد كم سنة  
 يكون عمره ثلاثة امثال عمر امرأته

الجواب  $\frac{٧}{٢}$  سنين قبل ما تزوّجا وفي انظر المسئلة خلل أي يجب ان يسأل كم  
 سنة قبل ما تزوّجا كان الخ

فما تقدم لنا هذه القواعد الاربع من جهة القيمة السلية

(١) في كل معادلة من الدرجة الاولى القيمة السلية للجهول

بعلامتها الواجبة توافق المعادلة التي استعملت منها

(٢) وهذه القيمة السلية بعلامتها الواجبة توافق شروط المسئلة على

معنى جبري

(٣) اذا اخذت قيمة ايجابية على معنى تؤخذ القيمة السلية الى

عكسها (انظر عدد ١٣ صفحة ٦)

(٤) القيمة السلية بعد بدل علامتها توافق المسئلة بعد تغيير

عباراتها بحيث صارت الكميات المضافة مطروحة والمطروحة مضافة

(١) أي كسر اذا أضف واحد الى صورتو بصير  $\frac{1}{2}$  وإذا أضف واحد الى مخرجو بصير  $\frac{1}{7}$

هذا الكسرايس له وجود حسابياً ولكن العبارة الجبرية  $\frac{1}{10} = \frac{1}{n}$  توافق شروط المسئلة  
(٥) جسمان تحركا الى جهة واحدة من نقطتين بينها اميال = ١ الواحد على سرعة ن ميل كل ساعة والاخر لحقة على سرعة م ميل كل ساعة ففي كم ساعة يدرك  
الثاني الأول  
الجواب في  $\frac{1}{2} = \frac{1}{n}$  ساعة

على أي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة صفراً

الجواب اذا كان  $n < م$

فلنفرض  $م = ٢٠$  ون  $٢٥ = ٢٠$  وا  $٦٠ = ٦٠$  ميلاً

ثم  $ك = \frac{٦٠}{٢٥ - ٢٠} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$

ومعنى ذلك ان الثاني لا يمكنه ان يلحق الأول لان حركته ابطأ وعند الانطلاق كانت المسافة بينهما ٦٠ ميلاً وهي تزيد كل ساعة وعلى افتراض حركتها قبل ذلك على هذا النسق نفسو كانا معاً في وقت ما قبل الوقت المفروض فيجب ان يقال بين جسمين ٦٠ ميلاً وهما يتحركان الى جهة واحدة الواحد على سرعة ٢٥ ميلاً كل ساعة والاخر على حركة ٢٠ ميلاً كل ساعة فكم ساعة منذ كانا معاً

ثم لنفرض  $ك =$  الساعات المطلوبة

و  $٢٥ ك =$  المسافة التي قطعها الأول

$٢٠ ك =$  المسافة التي قطعها الثاني

والآن بينهما ٦٠ ميلاً أي  $٢٥ ك = ٢٠ ك + ٦٠$   $٥ ك = ٦٠$   $ك = ١٢$

فلنا للمجهول قيمة ايجابية

ولاجل اشغال كلا الحالتين تكون المسئلة مطلوب وقت كونها معاً بدون تعيين

الماضي او المستقبل

في ما قيمته  $\frac{1}{2}$

(٦) على أي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها صفراً وما هو معنى

ذلك

الجواب اذا كان  $١ = ٠$  والمعنى انها معاً وقت الافتراض اذا خرجت قيمة

المجهول صفراً فقد توافق شروط المسئلة وقد تدل على كون المسئلة محالاً او متضمنة

محالاً

في ما قيمته  $\frac{1}{n}$

(٧) على اي افتراض تصير قيمة المجهول لهذه المسئلة نفسها  $\frac{1}{n}$  وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان  $m = n$

اذا كانت بينهما مسافة وتحركا على سرعة واحدة الى جهة واحدة لا يمكن ان يدرك احدهما الآخر فالعبارة  $\frac{1}{n}$  تدل على محال ويجب تعميم الدلالة على عدم النهاية وذلك لانه اذا كانت فضلة  $m$  ون اي  $m - n$  صغيرة جدا يكون الخارج  $\frac{1}{m-n}$  كبيرا جدا. مثالا لنفرض  $m - n = 0.1$

ثم  $k = \frac{1}{m-n} = \frac{1}{0.1} = 10$  واذا فرضنا  $m - n = 0.0001$

ثم  $k = \frac{1}{m-n} = \frac{1}{0.0001} = 10000$

فان لم يكن الفرق بين حركتيها صفرا لا بد من التناقص معا بعد مدة من المدة وتلك المدة تزيد كلما قل الفرق بين الحركتين فان فرضنا ذلك الفرق اقل من اصغر كمية مدركة يكون  $\frac{1}{m-n}$  اكبر من اكبر كمية مدركة اي غير متناهية فاذا خرجت قيمة المجهول  $\frac{1}{n}$  فذلك دليل على عدم امكانية استيفاء شروط المسئلة بالاعداد

في ما قيمته  $\frac{1}{n}$

(٨) على اي افتراض تصير قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها  $\frac{1}{n}$  وما هو معنى

ذلك الجواب اذا كان  $a = 0$  و  $m = n$

اذا كان  $a$  صفرا ينطلقان معا من نقطة واحدة واذا كان  $m = n$  يتحركان على سرعة واحدة فيبتعدان معا فتكون الساعة المطلوبة اية ساعة كانت لانها معا كل ساعة فالعبارة  $\frac{1}{n}$  غير معينة وتدل على اية كمية متناهية فرضت مها كانت

في المربحات

المربحة عبارة جبرية دالة على كون كمية اعظم من كمية. مثالا  $a < b$  فهي دالة على كون  $a$  اكبر او اكثر من  $b$  والكمية عن يمين علامة الترجيح سميت الاولى والتي عن يسارها سميت الثانية والقواعد الماضي ذكرها لمعاملة المعادلات تنجح على الغالب في معاملة المربحات

في مرجحين اذا كانت الكمية الكبرى على جانب واحد من علامة الترجيح في كليهما قول انها متفتتان معنى والآخر مختلفتان معنى

مثال النوع الاول  $7 < 9$  و  $7 < 6$  و  $8 > 2$  و  $4 > 2$

ومثال النوع الثاني  $7 < 10$  و  $6 > 2$

ومن القواعد لاجل معاملة المرحجات هذه الآتية

(١) اذا اضيفت كمية واحدة الى جانبي مرجحة او طُرِحَتْ منها كمية واحدة فالمرجحة المحاصلة تكون من معنى الاولى . مثالة

$$\begin{aligned} \text{لنفرض } ٨ < ٢ \text{ اصف } ٥ \text{ الى الجانبين} \\ ٥ + ٨ < ٥ + ٢ \text{ اطرح } ٥ \text{ من الجانبين} \\ ٨ - ٥ < ٢ - ٥ \end{aligned}$$

اذا كانت كميتا مرجحة سلبيتين فاصفرها جبرياً اكبرها حسابياً . مثالة

$$\begin{aligned} -٢٥ > -٢٠ \text{ واذا اُضيف } ٢٠ \text{ الى الجانبين تصبح } ١٠ > ٠ \\ \text{افرض } -٢ > -٢ \text{ اصف } ٦ \text{ الى الجانبين } -٢ > -٦ + ٢ \text{ اي } ٦ + ٢ > -٦ + ٢ \\ ٨ > ٤ \text{ او اطرح } ٦ \text{ من الجانبين } -٢ - ٦ > -٢ - ٦ \text{ اي } ٦ - ٢ > ٦ - ٦ \\ \text{وعلى هذه القاعدة تنقل كمية من جانب مرجحة الى الجانب الآخر بعد بدل علامتها} \end{aligned}$$

مثالة

$$\begin{aligned} ١ + ٢ < ٢ + ٢ \\ \text{بالمقابلة } ١ + ٢ < ٢ + ٢ \text{ اي } ١ < ٢ \end{aligned}$$

(٢) اذا كانت مرجحتان على معنى واحد واضيفت احدهما الى الاخرى الاولى للاولى والثانية الى الثانية فيكون المجموع مرجحة على نفس معنى الاوليين . مثالة

$$\begin{aligned} \text{لنفرض } ١ < ٢ \text{ و } ٣ < ٤ \text{ بالمجمع } ١ + ٣ < ٢ + ٤ \\ \text{ولكن بالطرح قد نصح القاعدة وقد لا نصح} \\ \text{مثالة } ٧ > ٤ \text{ و } ٢ > ٢ \text{ بالطرح } ٢ > ٢ \text{ اي } ٤ > ٢ \\ \text{ولكن } ٩ > ١٠ \text{ و } ٦ > ٨ \text{ بالطرح } ٢ < ٢ \end{aligned}$$

فتجنب هذه المعاملة على قدر الامكان واذا اضطر اليها يتعين معنى المرجحة الناتجة

(٣) اذا ضربت مرجحة في كمية ايجابية تكون المحاصلة على نفس معنى الاولى وهكذا اذا قُسمت على كمية ايجابية



$$١ > ٢ \times ٢ \quad ١٢ > ٢ \quad \text{و-} \quad ١ > -٢ \times ٢ \quad ١٢ > -٢ \times ٢$$

$$\frac{١}{٢} > \frac{٢}{٢} \quad \text{و-} \quad \frac{١}{٢} > -\frac{٢}{٢}$$

وعلى هذا القاعدة تزال الكمور من مرجحة

$$\text{مثالة } \frac{١}{٢} < \frac{٢}{٢} \quad \frac{١}{٢} < \frac{٢}{٢}$$

بالضرب في ١٦ تصير ١٢ (أ-ب) < ٢٢ (س-د)

(٤) اذا ضربت مرجحة في كمية سلبية او انقسمت عليها تكون المرجحة

الناجمة على عكس معنى الاولى . مثالة

$$٨ < ٧ \quad \text{اضرب في } -٢ \quad ٢٤ > ٢١$$

$$\text{وبالقسمة } -\frac{٨}{٢} > -\frac{٧}{٢}$$

وعند هذه المعاملة يقتضي تعيين علامة المضروب فيه او المقسوم عليه واذا كانت

سلبية تعكس علامة الحاصل او الخارج

(٥) اذا بدلت علامة جانبي مرجحة يجب قلب علامة الترجيح

لان ذلك مثل ضرب الجانبيين في -١

(٦) اذا كان الجانبان ايجابيين يمكن ترقيتها لاية قوة فُرِضَتْ

وتبقى المرجحة على معناها . مثالة

$$٥ < ٢ \quad ٢٥ < ٢ \quad \text{اي } ٢٥ < ٢ \quad \text{وا } ٢ < ٥ \quad \text{وا } ٢ < ٥$$

بكونا ايجابيين فقد يبقى المعنى وقد يتقلب

$$\text{مثالة } ٢ + > ٢ - \quad ٢ > ٢ - \quad \text{اي } ٢ > ٢ - \quad \text{فها على معنى واحد ولكن}$$

$$٢ - < ٥ - \quad ٢ - > ٥ - \quad \text{اي } ٢٥ > ٢ \quad \text{فقد انقلب المعنى}$$

(٧) في تجذير مرجحة قد يلزم قلب علامة الترجيح

$$\text{مثالة } ٢ > ٢ \quad \text{بالتجذير } ٢ > ٢ \quad \text{او } ٢ < ٢$$

امثلة

$$٤ > ٤$$

$$(١) ٧ > ٣ - ٢٥$$

- (٢)  $٥ ك - ٦ < ١٩$   
 (٣)  $٢ ك + \frac{١٤}{٦} ك - ٢٠ < ١٠$   
 (٤)  $٢ ك + \frac{٨}{٣} - ٨ > ٦$   
 (٥)  $\frac{١٧}{٢} < \frac{١٣}{٢} ك + \frac{١}{٢} ك + \frac{١}{٢} ك - \frac{١}{٢} ك$   
 (٦)  $٩ < ٧ - \frac{١}{١٢} ك + \frac{١}{٦} ك + \frac{١}{٤} ك + \frac{١}{٢} ك + \frac{١}{٢} ك$   
 (٧)  $\frac{١}{٧} ك - ١ ك + ١ ب > \frac{١}{٧} ب$   
 (٨)  $ك < ٥$   
 (٩)  $ك < ٤$   
 (١٠)  $ك > ٦$   
 (١١)  $ك < ٦$   
 (١٢)  $ك > ٦$

(٨) سئل رجل كم ثمن ساعتك فقال ان ضرب ثمنها في ٤ واضيف ٦٠ الى المحاصل يكون الجميع اكثر من ٢٥٦ واذا ضرب الثمن في ٣ وطرح ٤٠ من المحاصل يكون الجميع اقل من ١١٢ مطلوب ثمن الساعة

(٩) اي عدد اذا جُمع نصفه مع ثلثه يكون الجميع اقل من ١٠٥ ونصفه الآخر خمسة اكبر من ٢٢

(١٠) اي عدد ضعفه الا ٦ اكثر من ٢٤ وثلاثة امثاله الا ٦ اقل من مضعوه

مع ١٠

(١١) اي عدد من مجموعها ٢٢ واذا انقسم اكبرها على اصغرهما يكون الخارج اقل من ٥ واكثر من ٢

قد تقدم ان العبارة العامة لجسمين متحركين الى جهة واحدة في مـ (١) انظر مسئله ٥ فلنك العبارة صحيحة مها كانت المسافة بينهما ومها كانت سرعة كل واحد منها على افتراض الحركة الى جهة واحدة فلو فرض بينهما ١٠٠ ميل وسرعة الاول ٤ اميال كل ساعة وسرعة الثاني ٦ اميال كل ساعة مـ (٢) ان =  $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢}$  ساعة اي البعد بينهما مقسوماً على فصلة سرعتها يعدل الوقت المطلوب والمسافة التي يقطعها كل واحد تعدل ذلك الوقت في السرعة ثم لنفرض ان بينهما اميالاً = ١ والسرعة ن وم كما تقدم ولكن الحركة من طرفين الواحد نحو الآخر فاي العبارة الدالة على وقت الالتقاء

الجواب مـ (٣) ان = الوقت والوقت في السرعة يعدل المسافة التي يقطعها كل واحد فلو فرض بينهما ١٠٠ ميل كما تقدم وسرعة الواحد ٦ والاخر ٤ كما تقدم

فلنا الوقت =  $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٦}$  واذا فرض ك = مسافة الاول

وي = مسافة الثاني لنا ك =  $\frac{٤ \times ١٠٠}{٤ + ٦}$  وي =  $\frac{٦ \times ١٠٠}{٤ + ٦}$

ثم لنجعل المسئلة عامة اي جسمان بينهما ١ ميل وسرعة حركة احدهما ن ميل

وسرعة حركة الآخر م ميل كل ساعة فاي متى يلتقيان وكم المسافة التي يقطعها كل واحد منها

لتفرض ق = الوقت ك = مسافة الأول وى = مسافة الثاني ود = المسافة كلها

$$(١) \text{ ك + وى = د } \quad (٢) \text{ ك = ن } \times \text{ ق } \quad \text{وى = م } \times \text{ ق}$$

$$\text{و (ن + م) } \times \text{ ق = د او (٣) ق = م + ن$$

$$(٤) \text{ ك = ن } \times \text{ ق = م } \times \text{ ق = م + ن}$$

فاذا كان ن = م ك = وى  $\frac{١}{٢}$  د لان السرعة واحدة للثنتين

$$\text{اذا كان ن = ٠ ك = م } \times \text{ ق = وى = م } \times \text{ ق = د}$$

اي الواحد ساكن والثاني يقطع المسافة كلها

(١) غروب الساعات وغروب الدقائق متفقان عند الساعة ١٢ في اية ساعة

يتفقان ايضا ق = م = د

وبما ان المينا منسومة الى ١٢ ساعة لتفرض د = ١٢

ون وم حركة الغروبين النسبية اي الاول م = ١٢

$$\text{ون = ١ اي ق = } \frac{١٢}{١١} = \frac{١}{١١} \times \frac{١٢}{١} = \frac{١٢}{١١}$$

وان سئل اي متى يتفق الغروبان بين الساعة ٢ و٤ لثقل الثاني يتحرك ٢ عوضاً

عن ١ وق =  $\frac{١٢ \times ٢}{١١}$  ولو سئل اي متى يجعل الغروب الواحد زاوية قائمة مع الآخر

بين الساعة ٢ و٤ لثقل يتنصف للواحد ان يمر على مسافة د =  $\frac{١}{٢}$  وق =  $\frac{١٢}{١١} \times \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢} = \frac{٢}{١١} \times \frac{١٢}{١}$  ولو سئل في اي وقت بين ٥ و٦ يكون الغروبان على استقامة

واحدة لثقل

$$\text{د = } \frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٢} \times \frac{١١}{١} = \frac{٥٥}{١٢}$$

ودائرة الساعة يمكن ان نوسها الى قدر ماشنا فتكون عبارة عن دائرة جرمين

ساويين وهذه المعادلة نفسها تدل على نسبة حركة الشمس الى حركة القمر لانها يتحركان

مثل عنري ساعة

الدائرة ٢٦٠ والقمر يتحرك كل يوم على المعدل ١٢٦٤' ١٢' والشمس ٢٨٥٦٥°

اي اقل من درجة فحركة القمر اسرع وتعديل ن وحركة الشمس = م ون = م

$$\text{١٢٦٤' ١٢' - ٢٨٥٦٥° = ١٢٦٤' ١٩٠٧٥° والوقت لالتحاق الجرم الواحد بالآخر}$$

$$\text{اي ق = ن = م}$$

$$= \frac{360}{12 \times 19.75} = 1.587 \times 10^4 \text{ يوماً أي } 29 \text{ يوماً و } 12 \text{ و } 4 \text{ و } 2 \text{ أي مدة دوران}$$

القمر القانوني أو الشهر القانوني

الزهرة لو نُظِرَ إليها من الشمس لكانت حركتها اليومية  $1^\circ 46'$  والارض حركتها اذا نُظِرَ إليها من الشمس  $1^\circ 59'$  كل يوم ففي اية مدة تكون الارض والزهرة والشمس على استقامة واحدة  $n = 1^\circ 22'$   $m = 59^\circ$   $d = 260^\circ$   $n - m = 27^\circ$  وق  $= \frac{360 \times 260}{27} = 884 \times 10^3$  يوماً ونصف ذلك هو مدة مكث الزهرة ونجم الصبح ونجم الغروب وهذه المعادلة الثلاثة على النسبة بين المسافة والسرعة ثابتة صحيحة في اية مسألة كانت واذا تعين الوقت بالرصد كما هو ممكن من جهة الارض وسيار من السيارات العليا فيستعمل معدل حركة اي سيار كان البوي لان  $d = 260^\circ$  ون  $= 59^\circ$  و اي حركة الارض منظور إليها من الشمس ولنفرض ان  $m$  اي حركة المرنج مثلاً مجهول ولنفرضها  $= k$  ثم  $q = n - k$   $q - n = k$   $q - k = d$   $k = n - d$  وقد ذكرت هذه الامثلة هنا للدلالة على كيفية استخدام الطرق الجبرية في المسائل الفلكية وغيرها وسوف اذكر امثلة اخرى لذلك في عملها

—o—

## الفصل السادس عشر

في التناسب والنسبة

١٧٤ التناسب هو التفاوت بين كميتين باعتبار المقدار. ولا يقع الا بين الكميات المشابهة اي بين عددي او بين خطي وخطي او بين مجسم ومجسم او بين سطح وسطح وهلم جرا لانه لا يمكن مناسبة خطوط على اربطال ولا سطوح على اقسام الوقت. واذا اعتبرت زيادة كمية على اخرى فهو التناسب الحسابي واذا اعتبرت مرار وجود احدهما في الاخرى فهو التناسب الهندسي

١٧٥ التناسب الحسابي حسبما تقدم هو الفضلة بين كميتين او عدة كميات. والكميات نفسها في اجراء التناسب. فالتناسب الحسابي بين ٥ و ٢ هو ٢ ويدل عليه بوضع علامة الطرح بين الكميتين هكذا ٥ - ٢ او بوضع نقطتين هكذا ٥ . ٢ فان ضربت

اجزاء تناسب حسائي في كمية او اقسمت عليها يُضرب التناسب او ينقسم على تلك الكمية

مثاله لو فرض  $ت - ب = ر$

بضرب الجانبيين في  $ح$  لنا  $ح ت - ح ب = ح ر$

وبالقسمة على  $ح$   $ت - ب = ر$

اذا اُضيفت اجزاء تناسب الى اجزاء تناسب آخر كل جزء الى نظيره او طرحت

اجزاء الواحد من اجزاء الآخر بعدل تناسب المجمع او الفضلة مجتمع التناسيب او

فضلتها . مثاله ليكن  $ت - ب$  تناسيب ثم  $د - ح$

$(ت + د) - (ب + ح) = (ت - ب) + (د - ح)$  لان كل واحد من

الجانبيين  $ت + د - ب - ح$  وكذلك  $(ت - د) - (ب - ح) =$

$(ت - ب) - (د - ح)$  لان كل واحد من الجانبيين  $ت - د - ب + ح$

التناسب الحسائي بين  $١١$  و  $٤ = ٧$

التناسب الحسائي بين  $٥$  و  $٢ = ٣$

وتناسب المجمع  $١٦$  و  $١٠ = ٦$  = مجموع التناسيب

وتناسب الفضلة  $٦$  و  $٤ = ٢$  = فضلة التناسيب

١٧٦ التناسب الهندسي هو المداويل عليه بالخارج من قسمة كمية على اخرى .

فالتناسب الهندسي بين  $٨$  و  $٤$  هو  $\frac{٨}{٤} = ٢$  وبين  $٢$  و  $١$  هو  $\frac{٢}{١} = ٢$  وبين  $٤$  و  $٢$

$ح$  و  $ب$  هو  $\frac{ح}{ب} = ٢$  ويدل عليه ايضا بنقطتين بين الكميتين . مثاله  $ت :$

$ب$  و  $١٢ : ٤$  ويقال للكميتين معاً زوج وتسمى الاولى سابقاً والثانية تالياً

١٧٧ في كل تناسب ثلاثة اقسام وهي السابق والتالي والناسب الواقع بينها . وان

فرض اثنان منها يستعمل منها الثالث هكذا

لفرض السابق  $= ت$  والتالي  $= س$  والتناسب  $= ر$  ثم حسب الحد

المذكور آنفاً  $ر = \frac{ت}{س}$  اي التناسب بعدل الخارج من قسمة السابق على التالي بالجبر

$ت = س ر$  اي السابق بعدل حاصل التالي في التناسب . وبالقسمة على  $ر$

$س = \frac{ت}{ر}$  اي التالي بعدل الخارج من قسمة السابق على التناسب

فرع <sup>أول</sup> في زوجين ان كان السابقان متساويين والثانيان متساويين ايضاً  
 يكون التناسبان متساويين (افلديس ك ٥ ق ٧)  
 فرع <sup>ثاني</sup> في زوجين ان كان التناسبان متساويين والسابقان متساويين يكون  
 الثانيان متساويين. وان كان التناسبان متساويين والثانيان متساويين يكون السابقان  
 متساويين (افلديس ك ٥ ق ٩)

١٧٨ اذا تساوى السابق والثاني يكون التناسب واحداً ويقال له تناسب  
 المساواة. مثالة  $١٨:٦ \times ٣$  وإذا كان السابق أكبر من الثاني يكون التناسب  
 أكثر من واحد. مثالة  $٦:١٨ = ٣$  وتسمى تناسباً أعظم. وإذا كان السابق أصغر  
 من الثاني يكون التناسب أقل من واحد. مثالة  $٣:٦ = \frac{١}{٢}$  وتسمى تناسباً أصغر. اما  
 التناسب بالقلب او التناسب المكفوء فهو تناسب مكفوء كيتين. فالتناسب بالقلب  
 بين ٦ و ٣ هو  $\frac{١}{٦} : \frac{١}{٣}$  اي  $\frac{١}{٦} : \frac{١}{٣}$  والتناسب المستقيم بين ت و ب هو ب : ب والقلب  
 هو ت : ب اي ت : ب = ت : ب = ت : ب = ت : ب اي الخارج من قسمة الثاني على  
 السابق. فيدل على التناسب المكفوء اما بقلب الكسر الدال على المستقيم واما بقلب  
 رتبة السابق والثاني. فتناسب ت : ب بالقلب هو ب : ت

١٧٩ التناسب المركب هو التناسب بين حواصل اجزاء تناسبين فلكثر اذا  
 ضرب كل جزء من الواحد في نظيره من الآخر. مثالة

$$٢ = ٣ : ٦ \quad \text{تناسب}$$

$$٢ = ٤ : ١٢ \quad \text{وتناسب}$$

$$٦ = ١٢ : ٧٢ \quad \text{والمركب منها هو}$$

وهكذا المركب من ت : ب و س : د و ح : ي هو ت س ح : ب د ي  
 $\frac{ت س ح}{ب د ي}$

فرع كل تناسب مركب يعدل حاصل التناسبات البسيطة التي تركب منه - ا.  
 مثالة تناسب ت : ب = ب : س : د = د : ح : ي = ي : ح والركب هو ت س ح  
 : ب د ي =  $\frac{ت س ح}{ب د ي}$  حاصل الكسور الدالة على التناسبات البسيطة

١٠٨ في عدة تناسبات اذا كان ثاني الاول سابق الثاني وثاني الثاني سابق

الثالث وهم جراً يكون تناسب السابق الأول الى التالي الاخير مائلاً للتناسب المركب من التناسبات كلها . مثالة

ت : ب : ب : س : د : د : ح  
فالركب من هذه التناسبات هو ب : س : د : ح وهو يعدل ح : اي التناسب السابق الأول الى التالي الاخير

١٨١ التناسب المركب من مربع اجزاء تناسب بسيط يُسمى تناسبا مائلاً . فلو فرض ت : ب لكان تناسبها المائلي ت : ب : ب : س : د : ح والكمي هو المركب من تكرار ثلاثة تناسبات بسيطة اي ت : ب : ب : س : د : ح والكمي الجذر المائلي هو ت : ب : ب : س : د : ح والكمي الجذر الكمي ثلث : ثلث : ثلث : ثلث : ثلث : ثلث اي ٣ : ٣ : ٣ : ٣ : ٣ : ٣

٦ = ٣ : ١٢	ومضاعفاته
٩ = ٣ : ١٨	وثلاثة امثاله
١٢ = ٣ : ٢٤	والمائلي
١٨ = ٣ : ٣٦	والكمي

١٨٢ قدر رأينا ان التناسب يدل عليه بكسر . ورأينا في فصل الكسور ان ضرب صورة كسر في كسر قيمته وقسمه صورته كقسمة قيمته (٤٥) فاذا ضرب سابق زوج في كمي ما ي ضرب التناسب في تلك الكمية . وقسمه السابق يُقسم التناسب . مثاله ٣ : ٦ = ٤ : ٨ و ١٢ = ٣ : ٤ وت : ب = ب : س : د : ح = ب : س : د : ح  
فرع اذا بقي التالي على حاله فكلما زاد السابق زاد التناسب وبالقلب ( اقليدس ك ٥ ق ٨ و ١٩ )

١٨٣ ضرب تالي زوج كقسمة التناسب . وقسمه التالي كضرب التناسب . مثاله ٦ = ٣ : ١٢ و ٤ = ٣ : ٤ وت : ب = ب : س : د : ح = ب : س : د : ح  
فرع اذا بقي السابق على حاله فكلما زاد التالي صغر التناسب وبالقلب ( اقليدس ك ٥ ق ٨ و ١٠ )  
ثم انه قد اتضح ما تقدم ان ضرب سابق زوج هو كقسمة التالي . وقسمه السابق كضرب التالي . مثاله

٤:٨ = ٢ بضرب السابق في اثنين ٤:١٦ = ٤

بقسمة التالي على اثنين ٤:٨ = ٢

فرع إذا انك سابق أو تال إلى ضلعين فأكثر يمكن نقل ضلع فأكثر من  
أحدهما إلى الآخر بدون تغيير التناسب . مثاله  
 $٢ = ٩ : ٦ \times ٢ = ١٨ : ٦$   $٢ = \frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$   $٢ = \frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$   $٢ = \frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$   
وإن ضرب السابق والتالي كلاهما في كمية واحدة أو انقسما عليها فلا يتغير التناسب  
(أقليدس ك ٥ ق ١٥) مثاله

٢:٨ = ٢ بالضرب في ٢ ٢:١٦ = ٨

وبالقسمة على ٢ ٢:٨ = ٢:٤

فرع التناسب بين كسرين لما مخرج مشترك هو مثل الذي بين صورتها .  
فتناسب  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$  هو  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$

فرع ثان التناسب بين كسرين لما صورة مشتركة هو مثل التناسب بالقلب  
بين مخرجيهما . مثاله  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$  هو  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$  أي  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$

فلكي نستعمل التناسب بين كسرين في صحيح فضرهما في المخرجين . مثاله  
 $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$  فبالضرب في ٢ لنا  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$  أي  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} = ١ : ١$

١٨٤ إذا تركب تناسب اعظم (١٧٨) مع تناسب آخر بزيده . مثاله

لفرض التناسب الاعظم  $١ : ١$

وتناسبا آخر  $١ : ١$

فالتركيب منها  $١ : ١$  وهو اعظم من  $١ : ١$

إذا تركب تناسب اصغر مع تناسب آخر ينقصه

لفرض التناسب الاصغر  $١ : ١$

وتناسبا آخر  $١ : ١$

بالتركيب  $١ : ١$

وهو اصغر من  $١ : ١$

١٨٥ إذا أضيف إلى جزئي زوج أو طرح منها كمتان تناسبها مثل تناسب

الزوج المذكور يكون بين المجموعين أو الباقيين نفس ذلك التناسب (أقليدس ك ٥

ق ٥ و ٦)



مفروض تناسب ت : ب مثل س : د ثم ت + س : ب + د = ت : ب

أو س : د

(١) لان بالمفروض  $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) بالجبر ت د = ب س

(٣) اضعف س د الى الجائين ت د + س د = ب س + س د

(٤) بالقسمة على د ت + س = ب س + س د

(٥) بالقسمة على ب + د  $\frac{ت + س}{ب + د} = \frac{ب س + س د}{ب + د}$

وكذلك  $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(١) لان بالمفروض  $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) وبالجبر ت د = ب س

(٣) بطرح س د من الجائين ت د - س د = ب س - س د

(٤) بالقسمة على د ت - س = ب س - س د

(٥) بالقسمة على ب - د  $\frac{ت - س}{ب - د} = \frac{ب س - س د}{ب - د}$

مفروض  $٢ = ٥ : ١٥$

وايضاً  $٢ = ٢ : ٩$

يجمع اجزاء الزوجين  $٢ = ٢ + ٥ : ٩ + ١٥$

بالطرح  $٢ = ٢ - ٥ : ٩ - ١٥$

وممكنما تعددت الأزواج . مثلاً

$٢ = ٦ : ١٢$

$٢ = ٥ : ١٠$

$٢ = ٤ : ٨$

$٢ = ٣ : ٦$

بالجمع  $٢ = (٢ + ٤ + ٥ + ٦) : (٦ + ٨ + ١٠ + ١٢)$

ق او ١٢

١٨٦ تناسب اعظم بصغر باضافة كمية واحدة الى جزيه . مثاله اذا فرض

ت + ب : ت اي  $\frac{ت + ب}{ت}$  واذا اضيف ك الى الجزئين فلنا  $\frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$  ثم

بالتحويل الى مخرج مشترك يصير الأول  $\frac{ت + ب + ت + ك + ك}{ت (ت + ك)}$  والثاني

$\frac{ت + ب + ت + ك}{ت (ت + ك)}$  فالصورة الثانية اقل من الاولى ومن ثم صغر النسب

تناسب اصغر يزداد باضافة كمية واحدة الى جزئيه  
 مفروض ت - ب : ت اي  $\frac{ت - ب}{ت}$  ثم باضافة ك الى الجزئين لنا  
 ت - ب + ك : ت + ك اي  $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$  وبالتحويل الى مخرج مشترك يصير  
 الاول  $\frac{ت - ب}{ت} = \frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$  والثاني  $\frac{ت - ب}{ت} = \frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$  والصورة  
 الثانية اكبر من الاولى فيكون التناسب قد زاد . واذا طرح كمية واحدة من الجزئين  
 يكون الفعل عكس ما ذكر

## امثلة

- (١) اي تناسب اكبر ١١ : ٩ ام ٤٤ : ٣٥
- (٢) اي تناسب اكبر ت + ٣ : ١/٢ ت ام ٢ ت + ٧ : ١/٢ ت
- (٣) سابق زوج ٦٥ والتناسب ١٢ فاهو التالي
- (٤) اذا كان التالي ٧ والتناسب ١٨ فاهو السابق
- (٥) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٣ و ٢ : ٥ ب و ٧ : ١ + ٣ : ٢
- (٦) ما هو التناسب المركب من ك + ٣ : ٥ ب وك - ٣ : ٥ ب و ت + ٣ : ٥ ب وت  
 الجواب ك : ٣ - ٥ ب ح
- (٧) اذا تركب ٥ : ٣ + ٧ : ٢ ك - ٣ مع ك + ٢ : ١/٢ ك + ٣ فحل بمحدث  
 تناسب اعظم او اصغر الجواب تناسب اعظم
- (٨) اي تناسب من الانواع الثلاثة (١٧٨) بمحدث من تركيب ك + ٣ : ٥ ب  
 وك - ٣ : ٥ ب وب :  $\frac{ك - ٣}{٥} - \frac{٣}{٥}$  الجواب تناسب المساواة
- (٩) ما هو التناسب المركب من ٥ : ٧ و ٩ : ٤ المالي و ٣ : ٢ الكمي  
 الجواب ١٤ : ١٥
- (١٠) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٣ وك - ٣ : ٥ الكمي و ٩ : ٤ المجزئي  
 المالي الجواب ك : ٣ - ٥
- (١١) ما هو التناسب المركب من ت - ٣ : ك - ٣ و ت + ٣ : ك + ٣ وب :  
 ت - ٣ الجواب (ت + ٣) : (ك + ٣) ت
- (١٢) اي تناسب اكبر ت + ٣ : ١/٢ ت + ٤ ام ت + ٤ : ١/٢ ت + ٥  
 الجواب ت + ٤ : ١/٢ ت + ٥

نبذة

في النسبة

١٨٧ النسبة في المساواة بين تناسبين فأكثر. وفي اما حياية واما هندسية.  
فالحياية في مساواة تناسبات حياية كما في ٦ ٤ ١٠ ٨ والهندسية في  
مساواة تناسبات هندسية كما في ٦ ٢ ١٢ ٤ فينبغي ان يميز بين التناسب  
والنسبة ولو استعمل اللفظان مترادفين في بعض الاحيان. والفرق بينهما واضح اذ يقال  
في تناسب ما انه اكبر من آخر. مثاله ١٢ : ٢ اكبر من ٢ : ٦ ولا يقال ذلك في  
النسبة لانها مساواة تناسبات والمساواة تستلزم عدم التفاوت. وفي كل نسبة زوجان.  
ويقال للسوابق الاجزاء المشابهة وكذلك للتوالي. ويقال للسوابق والتوالي من كل  
زوج الاجزاء المتناسبة ولا خلاف في رتبة زوجي نسبة لانه ان كان ت : ب :: س : د  
تكون س : د :: ت : ب من حيث مساواة النعبتين. واذا قصد الدلالة على  
نسبة بين ثلاث كميات فلا بد من تكرار الوسطي. فيدل على النسبة بين ٨ و ٤ و ٢  
هكذا ٨ : ٤ :: ٤ : ٢

وَيُسَمَّى المَكْرَّرُ مُتَنَاسِبًا مُتَوَسِّطًا بَيْنَ الْآخَرَيْنِ. وَيُسَمَّى الْثَالِثَةُ مِنَ الْكِمَيَّاتِ الثَّلَاثِ  
مُتَنَاسِبًا ثَالِثًا لِلْآخَرَيْنِ

١٨٨ النسبة بالقلب ويقال لما ايضا النسبة المكفوءة في المساواة بين تناسب  
معتنم وناسب بالقلب. مثاله ٢ : ٤ :: ١/٢ : ١/٤ اي نسبة ٤ الى ٢ في القلب كسبة ٢  
الى ٤ وتكتب احيانا هكذا ٢ : ٤ :: ٢ : ٤ بالقلب. ومتى تعددت الكميات وكان  
تناسب الاولى الى الثانية مثل تناسب الثانية الى الثالثة وهلم جرا سُمِيَتْ النسبة متصلة.  
مثاله ١٠ و ٨ و ٦ و ٤ و ٢ في النسبة الحياية المتصلة. و ٦ و ٤ و ٢ و ١ و ٨ و ٤ في  
النسبة الهندسية المتصلة. وهكذا ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ح الى اخره.  
والنسبة الحياية انما في معادلة بسيطة. مثالها ت - ب = س - د وفي كل نسبة  
حياية يكون مجموع الطرفين مائلا لمجموع الوسطين اي ت + د = ب + س وهكذا  
في ١٢ - ١٠ = ١١ - ٩ ٩ + ١٢ = ١١ + ١٠ وان كانت ثلاث كميات على  
نسبة حياية يكون مجموع الطرفين مضاعف الوسط. فاذا فرض ت - ب = ب -  
- من يكون ت + س = ٢ ب

نبذة

في النسبة الهندسية

١٨٩ متى كانت اربع كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائلاً لحاصل الوسطين

مفروض ت:ب::ب:س د فاذا ت د = ب س لانه بالمفروض ت = س وبالجبر ت د = ب س وهكذا ١٢:٨::١٥:١٠ ١٢×١٠=٨×١٥  
فرغ اذا قيل ضلع من طرف الى آخر او من وسط الى آخر لا تغير النسبة. فاذا  
فرض ت:م:ب::ك:ي تكون ت:ب::م:ك ي واذا فرض ن:ت:  
ب:ك:ي تكون ت:ب::ك:ن ي

اذا كان حاصل كيتين مائلاً لحاصل كيتين أخريين تكون الاربع على نسبة هندسية اذا جيل ضلعا الجانب الواحد طرفين وضلعا الجانب الآخر وسطين. فان  
فرض م:ي=ن:ح تكون م:ن::ح:ي وان فرض (ت+ب)×س=  
(د-م)×ي تكون ت+د:م:ي:س

اذا كانت ثلاث كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائلاً لمربع الوسط. مثالة اذا فرض ت:ب:ب:س يكون ت:س=ب:ب فبجد متناسباً  
متوسطاً بين كيتين بنجذير حاصلها. فاذا فرض ت:ك:ك:س لنا ك'=  
ت س وك=ت س

١٩٠ يتيج ما تقدم ان كل طرف من نسبة يعدل حاصل الوسطين مقسوماً على الطرف الآخر. وكل وسط يعدل حاصل الطرفين مقسوماً على الوسط الآخر  
اذا فرض ت:ب:ب:س د يكون ت د = ب س وت = د = ب س  
ب = ب = س = س = ت د فان فرض ثلاثة اجزاء من نسبة نستعمل  
الرابع بقية حاصل الثاني والثالث على الاول. وقد بُني على ذلك باب الاربعة المتناسبة  
في علم الحساب

١٩١ اذا كانت اربع كميات متناسبة يمكن مبادلة الطرفين او الوسطين او  
جزءي كل زوج بدون تغيير النسبة لان حاصل الطرفين لا يزال مائلاً لحاصل  
الوسطين بعد المعاملات المذكورة

اذا فرض  $ت:ب::س:د$

و  $٤:٦::٨:١٢$

فاذا بمبادلة الوسطين

$ت:س::ب:د$   $٤:٨::٦:١٢$  (اقلیدس ك ه ق ١٦)

وبمبادلة الطرفين

$د:ب::س:ت$   $١٢:٦::٨:٤$

وبمبادلة جزئي كل زوج

$ب:ت::د:س$   $٦:٤::١٢:٨$

ويسمى هذا العمل الاخير قلباً

وبمبادلة ترتيب الزوجين

$س:د::ت:ب$   $٨:١٢::٤:٦$

ويقلب ترتيب النسبة كلها

$د:س::ب:ت$   $١٢:٨::٦:٤$

لان المعادلة من الجميع  $ت = د = ب = س$  و  $٨ \times ٦ = ١٢ \times ٤$

١٩٢ لا تنزع النسبة اذا ضرب الجزآن المتناسبان معاً او الجزآن المتشابهان معاً في كمية واحدة او انما عليهما

مفروض  $ت:ب::س:د$

(١) بضرب المتناسبين الاولين  $م:ت::م:ب::س:د$

(٢) بضرب المتناسبين الآخرين  $ت:ب::م:س::م:د$

(٣) بضرب السابقين (اقلیدس ك ه ق ٢)

$م:ت::ب:م::س:د$

(٤) بضرب التاليين  $ت:م::ب:س::س:د$

(٥) بقسمة الاولين  $ت:م::ب:س::س:د$

(٦) بقسمة الآخرين  $ت:ب::م:س::س:د$

(٧) بقسمة السابقين  $ت:م::ب:س::س:د$

(٨) بقسمة التاليين  $ت:م::ب:س::س:د$

فرغ اذا ضرب كل واحد من الاجزاء الاربعة او انقسم لا تتغير النسبة (اقلیدس ك ه ق ٤)

ت م ب م س م د ت ب م س م د  
 فرع آخر في المعاملات الثاني المتقدمة يمكن ضرب الثاني عوضاً عن قسمته  
 السابق وعكسه

١٦٣ اذا عدل تناسبان تناسباً ثالثاً يكونان متساويين (اقلیدس ك ه ق  
 (١١) (اولية ١١)

اذا قُرِضَ ت ب م ن و س د م ن  
 يكون ت ب م س د او ت س ب د  
 واذا قُرِضَ ت ب م ن و م ن س د  
 يكون ت ب م س د او ت س ب د  
 فبرع اذا قُرِضَ ت ب م ن و م ن س د  
 يكون ت ب م س د (اقلیدس ك ه ق ١٢)

١٦٤ اذا قُرِضَ م ت ن ب ثم بالمبادلة م ن ت ب  
 واذا قُرِضَ م س ن د ثم بالمبادلة م ن س د

فحسباً تقدم ت ب م س د  
 اذا قُرِضَ م ت ن ب ثم بالقلب والمبادلة ت ب م ن  
 واذا قُرِضَ س م د ن ثم بالمبادلة س د م ن فيكون  
 ت ب م س د حسباً تقدم

اذا قُرِضَ ت م ب ن ثم بالمبادلة ت ب م ن  
 واذا قُرِضَ س د م ن تكون ت ب م س د كما تقدم (اقلیدس  
 ك ه ق ٢٢)

١٦٥ في عدة نسب اذا كان الجزان الآخران من الاولى الاولين من الثانية  
 والآخران من الثانية الاولين من الثالثة ولم جراً تكون نسبة الاولين من الاولى كنسبة  
 الآخرين من الاخيرة . مثالة

ت ب م س د  
 س د ح ل  
 ح ل م ن  
 م ن ك ي  
 تكون ت ب م ك ي

وهكذا ان امكن تحويل النسب الى هذا الترتيب  
 مثالة ت : س :: ب : د بالمبادلة ت : ب :: س : د  
 س : ح :: د : ل بالمبادلة س : د :: ح : ل  
 ح : م :: ل : ن بالمبادلة ح : ل :: م : ن  
 م : ك :: ن : ي بالمبادلة م : ن :: ك : ي  
 ت : ب :: ك : ي كما تقدم

١٦٦ متى كان الطرفان او الوسطان من نسبة واحدة كالطرفين او الوسطين  
 من اخرى تكون الاجزاء الاربعة الباقية متناسبة بالقلب

مثالة ت : م :: ن : ب وس : م :: ن : د ثم ت : س :: ب : د  
 لان ت : ب = م : ن وس : د = م : ن وث ب = س : د اي ت : س :: د : ب  
 وهكذا متى تشابه الطرفان . مثالة م : ت :: ب : ن وم : س :: د : ن ثم  
 ت : س :: د : ب (افلديس ك ه ق ٢٣)  
 واذا كانت ت : م :: ن : ب وم : س :: د : ن فيكون ت : س :: د : ب  
 كما تقدم

١٦٧ اذا شابهت اجزاء نسبة اجزاء نسبة اخرى يكون مجموعها او فضلها  
 ايضاً (افلديس ك ه ق ٢) مثالة  
 اذا فرض ت : ب :: س : د  
 وايضاً ت : ب :: م : ن

فبالجمع ت + م : ب + ن :: س : د وت - م : ب - ن :: س : د وت  
 : ب :: س + م : د + ن وت : ب :: س - م : د - ن  
 وبالمبادلة ت + م : س :: ب + ن : د وت - م : س :: ب - ن : د  
 وهكذا نعددت النسب . مثالة  
 س : د  
 ح : ل  
 م : ن  
 ك : ي  
 مفروض ت : ب ::

١٩٨ في النسبة الواحدة اذا اُضيف احد الجزئين المتناسبين او المشابهين الى الآخر او طرح احدهما من الآخر لا تتغير النسبة. فاذا قُرِضَ ت:ب::س:د  
و ١٢:٤::٦:٢ ثم

(۷) ت+پ:ت-ب:ب:س+د:س-د ای مجتمع الاولین الی فضلہا



كجميع الاخيرين الى فضلتها  
 فرع اذا كانت اربع كميات مركبة متناسبة كما في الامثلة المتقدمة تكون البسيطة  
 التي تركبت منها متناسبة ايضا. فاذا فرض  $ت + ب : ب : س + د : د$  تكون  
 $ت : ب : س : د$  ويسمى هذا العمل قسمة النسبة (افلوس ك ٥ ق ١٧)

١٩٩ اذا ضربت اجزاء نسبة في اجزاء نسبة اخرى كل جزء في نظيره تكون  
 الحواصل متناسبة ايضا. مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ وح : ل :: م : ن & ١٠ : ٥ :: ٨ : ٤ \\ تح : بل :: سم : دن & ١٢٠ : ٢٠ :: ٤٨ : ٨ \end{array}$$

وهكذا هما تعددت النسب . مثالة

$$\begin{array}{l} ت : ب :: س : د \\ ح : ل :: م : ن \\ ف : ق :: ك : ي \\ تح : ف : بل : ق :: سم : ك : دن : ي \end{array}$$

وهكذا اذا ترقمت اجزاء نسبة الى اية قوة فرضت . مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د & ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢ \\ ت : ب :: س : د & ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢ \\ ت : ب : س : د & ٤ : ١٦ :: ٢٦ : ١٤٤ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} وايضا مات : مات :: مات : مات \\ و مات : مات :: مات : مات \\ و ت : ب : س : د :: ت : ب : س : د \end{array}$$

٢٠٠ اذا انقسمت اجزاء نسبة الى اجزاء نسبة اخرى تكون المخارج متناسبة .

مثالة

$$٩:١٨::٦:١٢$$

$$ت:ب::س:د$$

$$٣:٩::٢:٦$$

$$ح:ل::م:ن$$

$$\frac{٩}{٣}:\frac{١٨}{٩}::\frac{٦}{٢}:\frac{١٢}{٦}$$

$$\frac{ت}{٣}:\frac{ب}{٩}::\frac{س}{٢}:\frac{د}{٦}$$

٢٠١ في تركيب بعض النسب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل . مثالة

$$ت:ب::س:د$$

$$م:ت::ن:س$$

$$ت:م::ب:ن::س:د$$

فاذا م:ب::ن:د وهكذا

$$٣:٩::٤:١٢$$

$$ت:ب::س:د$$

$$٦:٣::٨:٤$$

$$ب:ح::د:ل$$

$$١٥:٦::٢٠:٨$$

$$ح:م::ل:ن$$

$$١٥:٩::٢٠:١٢$$

$$ت:م::س:ن$$

٢٠٢ متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

$$\left. \begin{array}{l} ت = ب \quad س = د \\ ت < ب \quad س < د \\ ت > ب \quad س > د \end{array} \right\} \begin{array}{l} ت:ب::س:د \text{ فاذا} \\ ت:ب::س:د \end{array}$$

فرع اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة تكون الثانية اعظم من الرابعة (اقليدس ك ه ق ١٤) فان فرض ت:ب::س:د قبل المبادلة ت:س::ب:د وحيث ان كان ت = ب يكون س = د الى آخره

فرع ثان اذا فرض ت:م::س:ن وم:ب::ن:د فان كان ت = ب يكون س = د الى آخره (اقليدس ك ه ق ٢٠) لان بالتركيب ت:ب::س:د ومن ثم ان كان ت = ب يكون س = د الى آخره

$$\left\{ \begin{array}{l} ت:م::س:ن \text{ وحيث ان فرض} \\ م:ب::ن:د \end{array} \right.$$

فان كان  $t = b$  يكون  $s = d$  الى آخره (افلديس لكه ق ٢١)  
اذا كانت اربع كميات متناسبة تكون مكفواتها متناسبة ايضا . فاذا فرض  
 $t : b :: s : d$  يكون  $t : b :: s : d$  لان الحاصل من تحويلها كلها هو  
 $t = d = b = s$

### نبذة

#### في النسبة المتصلة

٢٠٢ في النسبة المتصلة (١٨٨) تكون جميع التناسبات متساوية . فاذا فرض  
 $t : b :: b : s :: s : d$  يبراد ان تناسب  $t : b$  يعدل تناسب  
 $b : s$  وتناسب  $s : d$  الى آخره . وتناسب الاولى الى الاخرى يعدل الحاصل  
من التناسبات المتوسطة بينها اي تناسب  $t : s$  يعدل  $t : b :: b : s :: s : d$   
ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في ايها شئت اي  $t : b :: b : s :: s : d$   
 $t : b = b : s$  فيكون  $t : s :: b : s$  ولذا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخرى كنسبة  
احد التناسبات المتوسطة مرفوعة الى قوة دليلها اقل من عدة الكميات بواحد . مثالا

اذا فرض  $t : b :: b : s :: s : d$  تكون  $t : s :: b : s$  وان فرض  
 $t : b :: b : s :: s : d :: d : e$  تكون  $t : e :: b : s$

٢٠٤ اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون متناسبة ايضا اذا انعكس  
ترتيبها حسب ما تقدم (١٩١) فاذا فرض

٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	
	٢	٢	٢	٢	فالتناسبات
٦٤	٣٢	١٦	٨	٤	وبالعكس
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	فالتناسبات

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفوات التناسبات المستقيمة  
ومكفوات كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاولية الرابعة

#### في النسبة الموسيقية

اذا كانت النسبة بين ثلاث كميات بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضلة

الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة قبل انهما على نسبة موسيقية . مثالة ٢ و ٢ و ٦ لان

$$٢ : ٦ :: ٢ : ٦$$

فاذا كانت ا وب وس على نسبة موسيقية فحينئذ

$$ا : س :: ا - ب : ب - س$$

بالتحويل الى معادلة تصير  $س = \frac{ا}{١ - \frac{ا}{ب}}$

فاذا اردت متناسبا ثالثا موسيقيا لكيتين فاقسم حاصل الاولى والثانية على

مضاعف الاولى الا الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبا ثالثا موسيقيا بين ٢ و ٥

مثال ٢ مطلوب متناسبا ثالثا موسيقيا بين ٥ و ٨

اربع كميات هي على نسبة موسيقية اذا كانت نسبة الاولى الى الرابعة كنسبة فضلة

الاولى والثانية الى فضلة الثالثة والرابعة . مثالة ٢ و ٤ و ٨ و ١٦ لان

$$٢ : ٨ :: ٤ : ١٦$$

واذا كانت ا ب س د على نسبة موسيقية فحينئذ

$$ا : د :: ا - ب : ب - س$$

بالتحويل  $د = \frac{ا}{١ - \frac{ا}{ب}}$

اي اذا اردت متناسبا موسيقيا رابعا لثلاث كميات فاقسم حاصل الاولى والثالثة

على مضاعف الاولى الا الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبا موسيقيا رابعا بين ٤ و ٥ و ٦

مثال ٢ مطلوب متناسبا موسيقيا رابعا بين ٥ و ٨ و ١٦

### مسائل

(١) اقسام ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلها الى مجموع مربعيها كنسبة ٢ الى ٥

لنفرض ك = قما و ٦٠ - ك = القسم الآخر

$$(١) \text{ بالشروط } ٦٠ - ك - ك : ٢ :: ك + ٢٦٠ - ٢٠ : ٥$$

$$(٢) \text{ بالتحويل الى معادلة } ٢٠٠ - ك - ٥ = ك + ٤٠٠ - ٧٢٠٠ + ٢٤٠ - ك$$

$$(٣) \text{ بالمناقلة والقسمه } ٦٠ - ك = ٨٠٠ - ك$$

$$(٤) \text{ باتمام التوزيع والتجذير والمناقلة } ٤٠ = ٦٠ - ٢٠$$

(٢) اقسام ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرها مع ستة الى الاصغر الا واحد عشر

كنسبة ٢:٩

لنفرض ك = الاكبر ٤٩ - ك = الاصغر

بالشرط ك + ٦ : ٢٨ - ك :: ٢ : ٩

باضافة السامتين الى التاليين ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١

بقسمة التاليين ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١

ثم بالتحويل ك + ٦ = ٢٦ ك = ٢٠

(٣) اي عدد اذا اضيف اليه ١ ثم ٥ ثم ١٢ تكون نسبة المجموع الاول : الثاني

:: الثاني : الثالث

لنفرض العدد ك

ثم بالشرط ك + ١ : ك + ٥ :: ك + ٥ : ك + ١٢

بالطرح ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨

بقسمة التاليين ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢

ثم ٢ ك + ٢ = ك + ٥ ك = ٣

(٤) ما عددان نسبة اكبرها الى الاصغر كجانبها الى ٤٢ وكضلعها الى ٦

لنفرض العددين ك وى

ثم بالشرط الاول ك : وى :: ك + ٤٢ : وى + ٤٢

وبالثاني ك : وى :: ك - ٦ : وى - ٦

بالمساواة ك + وى : ٤٢ :: ك - وى : ٦

بقلب الوسطين ك + وى : ك - وى :: ٤٢ : ٦

بالمجموع والطرح ٢ ك : ٢ وى :: ٤٨ : ٣٦

بالقسمة ك : وى :: ٤ : ٣

٢ ك = ٤ وى ٤ = ٣ وى ك = ٤/٣ ثم بالتعويض في النسبة الثانية وى = ٢٤

ك = ٣٢

(٥) اقسام ١٨ الى قسمين بين مربعيها نسبة ٢٥ : ١٦

لنفرض القسمين ك و ١٨ - ك

ثم بالشرط ك : (١٨ - ك) :: ٢٥ : ١٦

بالتحذير ك : ١٨ - ك :: ٥ : ٤

بالجمع ك: ١٨: ٥: ١٠

بالقسمة ك: ٣: ٥: ١٠ = ك

(٦) اقس ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر الى

الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كسبة ١٦: ١

لتفرض اكبرها ك والاصغر ١٤ - ك

بالشرط ١٤ - ك : ١٤ - ك = ١٦ : ١

بالضرب ك: (١٤ - ك) = ١٦

بالتجدير ك: ١٤ - ك = ١٦

بالجمع ك: ١٤: ٤: ٧

بالقسمة ك: ٣: ٤: ٨ = ك

(٧) اقس ٢٠ الى قسمين بينها نسبة ٢ المالة الى ١ المالة واستعمل متناسباً متوسطاً

بينها

لتفرض احدهما ك والاخر ٢٠ - ك

بالشرط ك: ٢٠ - ك = ٢: ١

بالجمع ك: ٢٠: ١٠: ٩ = ك والاخر ٢ = ١٨

(حسب ١٨٩) = ١٨ × ٢ = ٦

(٨) اي عدد من حاصلها ٢٤ ونسبة فضله كميها الى كعب فضلها كسبة ١٩: ١

لتفرض ك احدهما وي الآخر

بالمفروض ك ي = ٢٤

وايضاً ك - ي: (ك - ي) = ١٩: ١

بالسط ك - ي: ك - ي = ٢ + ك ي: ٢ + ك ي = ١٩: ١

بالطرح (١٩٤) ٢ ك ي - ٢ ك ي: (ك - ي) = ١٨: ١

بالقسمة على ك - ي ٢ ك ي: (ك - ي) = ١٨: ١

٢ ك ي = ٢٤ × ٢ = ٧٢ حسب المفروض

فبالتعويض ٧٢: (ك - ي) = ١٨: ١

بالضرب والقسمة (ك - ي) = ٤ - ك - ي = ٢ - ك ي = ٢٤ - ك = ٦

ي = ٤

(٩) مفروض (ت + ك): (ت - ك) = ٢: ١ ك + ي: ك - ي

مات البرهان من ذلك على ان ت : ك :: ٢ : ١  
 بالسطح ت + ٢ : ك + ٢ :: ت - ٢ : ك - ٢  
 بالجمع والطرح ٢ : ك :: ٢ : ك  
 بالقسمة ت + ٢ : ك + ٢ :: ت - ٢ : ك - ٢  
 بنقل ك ت + ٢ : ك + ٢ :: ت - ٢ : ك - ٢  
 بقلب الوسطين ت + ٢ : ت - ٢ :: ك + ٢ : ك - ٢  
 بالطرح ت : ك :: ٢ : ١  
 بالتخدير ت : ك :: ٢ : ١  
 مفروض ك : ١ :: ت : ٢

(١٠) وايضا ت : ب :: ٢ : ١  
 مات البرهان على ان دك = سي  
 بالترقية ت : ب :: س : د  
 بالمسواة س : د :: ك : ١  
 بقلب الوسطين س : ك :: د : ١  
 بالطرح س : ك :: د : ١

ثم دك = سي  
 مفروض  $\frac{ت - ب}{ب} = ٤$  ت برهان ت + ك : ٢ :: ب : ك

(١٢) مفروض ك : ١ :: ٢ : ١ ونسبة ٢ : ١ :: ٢ : ١  
 المركبة من ١٧ : ٢ و ٢ : ١ فالحاصل ١٧ : ٢ :: ٢ : ١  
 المطلوب ثلاثة اعداد على نسبة متصلة اوسطها ٦٠ ومجموع الطرفين ١٢٥

المجاب ٤٥ ٦٠ ٨٠  
 ما عددان حاصلها ١٢٥ ونسبة فضله مربعها الى مربع فضلها :: ٤ : ١  
 الجواب ١٥ ٦٠

(١٤) ما عددان نسبة فضلها ومجموعها وحاصلها كسبة ٢ و ٣ وه  
 الجواب ١٠ ٢  
 اقس ٢٤ الى قسمين نسبة حاصلها الى مجموع مربعها :: ٣ : ١٠  
 الجواب ١٨ ٦٠

(١٧) مزيج من خمر وماء كانت فيه نسبة فضلها : الماء :: ١٠٠ : الخمر ونسبة نفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء . فكم في المزيج من الصنفين

الجواب خمر ٢٥ ماء ٥

(١٨) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر :: ٢ : ٤ وإذا أُضيف ٦ الى الأكبر

وطُرِحَ ٦ من الأصغر كانت نسبة المجموع الى الفضلة :: ١ : ٤ الجواب ٢٤ و ١٦

(١٩) ما عددان حاصلها ٢٢٠ ونسبة فضلة كبيرها الى كسب فضلها :: ١ : ٦١

الجواب ٢٠ و ١٦

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر كالنسبة المئوية ٢ و ٤ والمتناسب

المتوسط بينهما هو ٢٤ الجواب ٢٢ و ١٨

(٢١) مطلوب عددان نسبة أكبرهما الى اصغرهما كسبة مجتمعهما الى ٤٢ وكسبة

فضلتها الى ٦ الجواب ٢٢ و ٢٤

(٢٢) مطلوب عددان نسبة أكبرهما الى اصغرهما كسبة مجتمعهما الى ١ وكسبة

فضلتها الى ب الجواب  $\frac{1}{2}(b+1)$  و  $\frac{1}{2}(b-1)$

(٢٣) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كسبة ٢ : ٤ ونسبة فضلة قوتها

الرابعة الى مجموع كبيرها كسبة ٣٦ : ٧ الجواب ٦ و ٤

(٢٤) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كسبة م : ن ونسبة فضلة قوتها

الرابعة الى مجموع مكبيها كسبة ف : ق الجواب  $\frac{m}{n} \times \frac{f}{q}$  و  $\frac{m}{n} \times \frac{f}{q} + 1$

## الفصل السابع عشر

في التغير او النسبة العمومية

٢٠٥ قد يحدث احياناً ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعض حتى يتغير احدهما

بتغير آخر منها فنحفظ النسبة . مثاله اذا قيل ان ثمن ٥٠ ذراعاً من قماش = ١٠٠

غرش فان طُرِحَ من الاذرع ١٠ نصير ٤٠ فطُرِحَ من الثمن ٢٠ فنصير ٨٠ وان

صارت الاذرع ٢٠ نصير الثمن ٦٠



	ذ	ذ	ذ	ذ	
اي	٥٠	٤٠	١٠٠	٨٠	
و	٥٠	٢٠	١٠٠	٦٠	
و	٥٠	٢٠	١٠٠	٤٠	والم جراً

فكلما تغير تالي الزوج الأول يتغير مثله تالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة .

إذا فرضنا أن ت وب وفرضت ت كمية من جنس ت ولكن أكبر منها او اصغر . وب كمية من جنس ب أكبر او اصغر مراراً مساوية للأحاد التي في فضل ت وت فتكون ت : ت :: ب : ب فإن تغيرت ت فصارت ت تتغير ب وتغير ب ويقال ان ت تغيرت بتغير ب او بالاختصار ان تاء كباء كما يقال ان اجرة فاعل يتغير كتغير مدة عمله وان ربح مبلغ يتغير كتغير راس المال . ولنا هنا جزءان من نسبة وكل نسبة لها اربعة اجزاء . فإذا قولنا السابق انما هو عبارة مختصرة نذكر جزءين من النسبة عوضاً عن الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقلنا نسبة راس مال : راس مال آخر :: ربح الأول : ربح الثاني

٢٠٦ نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شيء الى آخر بدون معرفة قيمتها الخصوصية . ويكفي لذلك جزءاً نسبته غير انه ينبغي ان نذكر كون الجزءين الآخرين متضمنين في المذكورين . كما او قيل ان ثل الماء هو بالنسبة الى مقدار فانه يراد به ان رطلاً : عدة ابطال مفروضة :: ثل رطل : ثل الابطال المفروضة وبدل على نسبة بين كميات غير ثابتة بهذه العلامة - او بهذه ∞ مثالها ت س ب فبراد ان ت تتغير كتغير ب اي ان ت : ت :: ب : ب ويقال لهذه العبارة اي ت س ب نسبة عمومية

٢٠٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخري بالاستقامة . فان ربا دين مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى راس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الربا والم جراً . اذا فرضنا ∞ ب فيبتدئ ا = م ب حيث تكون م كمية ثابتة . فاذا كانت الفضة (س) تتغير كربع الوقت (ت) فيبتدئ س = م ت واذا نقصت كمية عند زيادة اخرى او بالعكس

قول ان الاولى تتغير كالثانية بالقلب . مثالا ان الوقت الذي فيه يجمع الفاعل مبالغا  
يكون بالقلب كاجرتو اي كلما زادت الاجرة قلّ الوقت وبالقلب

٢٠٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كميّات او نقصانها قيل انها  
تغيرت كتغيرها معا . مثالا ربا دين يتغير كحاصل راس المال في الوقت . فان  
نضاعف راس المال ونضاعف الوقت زاد الربا اربعة امثال . ومتى كانت كمية  
متناسبة ابتداء مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تتغير بالاستقامة كالثانية وبالقلب  
كالثالثة . مثالا ان كانت ت : ت :: م : م تكون ت : م  
ومن امثلة ذلك قاعدة الجاذبية اي ج تتغير بالاستقامة كالمادة م وبالقلب  
كمربع البعد د اي ج : د

فترى ما سبق ان هذا الباب لا يلزم له شيء سوى ان يناس على قواعد النسبة  
المتقدم ذكرها . وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصرة بذكر فيها جزئين من اربعة  
اجزاء متناسبة . وان اشكل شيء من مسائله يوضح جليا بذكر الجزئين المحدوفين

٢٠٩ ينضج ما سبق انه يعكس ترتيب الاجزاء في نسبة عمومية كما في نسبة  
خصوصية . فان كان ت : س ب فكذلك ب : س ت لان ت : ت :: ب : ب  
اذا ب : ب :: ت : ت

وان ضرب جزء او جزئين من نسبة عمومية في كمية واحدة ثابتة او انقسما عليها فلا  
تتغير النسبة (١٩٢) مثالا

اذا فرض ت : ت :: ب : ب اي ت : س ب فيكون م : م :: ت : ت :: ب : ب  
اي م : ت س ب وم : ت : م :: م : ب : م اي م : ت س ب م الخ  
وهكذا ان ضرب كلا الجزئين في كمية غير ثابتة او انقسما عليها لا تتغير النسبة . فان  
فرض م : كمية متغيرة وت : ت :: ب : ب اي ت : س ب يكون م : م :: ت : ت  
:: م : ب : م اي م : ت س ب

فرع اول اذا تغيرت كمية كاخري يكون الخارج من قسمة احدهما على الاخرى  
كمية ثابتة كما ينضج من انه اذا تغيرت صورة كسر كتغير مخرج لا تتغير قيمته  
مثالا ت : ت :: ب : ب اي ت : س ب اذا ت : ب :: ب : ب  
فرع ثان اذا كان حاصل كميّتين ثابتا تتغير احدهما ككثيرة الاخرى . مثالا



فرعٌ اذا تغيرت كلتا كميتين كالثالثة بتغير حاصل الاثنين كبرج الاخرى  
مثاله اذا فرض

$$\begin{array}{r} \text{و} \\ \text{س} \text{ س} \\ \hline \text{اذا ت س س} \end{array}$$

واذا تغيرت كمية كاخرى بتغير قوة او اي جنسٍ فرض من الواحدة مثل ذلك  
المجذر او تلك القوة من الاخرى (ع ١٩٩)

مثاله اذا فرض  
يكون  
و

٢١٢ في تركيب نسب عمومية يصح طرح كميات متساوية من الجزئين  
مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب  
وب : ب :: س : س اي ب س س  
وس : س :: د : د اي س س د  
اذا ت : ت :: د : د اي ت س د

فرع اذا تغيرت كمية كثانية والثانية كثالثة والثالثة كمربعة ولم تجر فالاولى  
تتغير كالاخرى . مثاله اذا فرض ت س ب س د فحينئذ ت س د واذا  
فرض ت س ب س فحينئذ ت س س اي ان تغيرت الاولى كالثانية والثانية  
كمكثوة الثالثة فالاولى تتغير كمكثوة الثالثة

٢١٣ اذا تغيرت كمية كحاصل كميتين اخريين وكانت احدي الاخريين ثابتة  
فالاولى تتغير كالاخرى غير الثابتة . مثاله

اذا فرض ك س ل ب وكانت ب ثابتة فاذا ك س ل ومثال ذلك ايضاً  
نقل اللوح فانه يتغير كتغير طولو وعرضو وعمودو فان بقي العمق على ما هو كان تغير  
نقلو كتغير طولو وعرضو  
فرعاً ومكثوما تعددت الكميات . فان فرض

ك س ب ط

فان جُعِلَت ل ثابتة ك س ب ط

وان جُعِلَت ل ب ثابتة ك س ط

وان كانت قيمة كمية متوقفة على اخرين وان فُرِضَت الثانية تغيرت الاولى كالثالثة  
وان فُرِضَت الثالثة تغيرت الاولى كالثانية فالاولى تتغير كحاصل الاخرين . مثاله ان  
تغير ثقل لوح كالطول مع عرض مفروض وكالعرض مع طول مفروض ثم ان تغير  
الطول والعرض يتغير الثقل كحاصلها . وهكذا تنددت الكميات  
اذا تغيرت كمية كاخري تكون الاولى مساوية للثانية في كمية ثابتة . فان كان  
ت س ب فلا بد ان تكون نسبة ت : ب ثابتة . ويصح ان تُضْرَبَ في كمية ما  
حتى يكون الحاصل ت وان كانت نسبة ربح ١٠٠ غرش : راس المال ٢٠ : ١  
يكون لربح ١٠٠ غرش او ١٠٠٠ غرش نفس هذه النسبة الى راس المال  
نتيه . ان لفظه مفروض في مسائل هذا الباب ولا سيما في الفلسفة الطبيعية يراد  
بها كميات ثابتة كما انه في غير هذا الباب يراد بها كميات معروفة لتمييزها من المجهولة

## الفصل الثامن عشر

في السلسلة الحسابية والهندسية

٢١٤ السلسلة ويقال لها النسبة المتصلة نوعان حسابية وفيها كلامنا الآن .  
وهندسية وسياقي الكلام عليها . اما الحسابية فهي عبارة عن طائفة من الكميات تعلو او  
تنهد بزيادة كمية مفروضة او طرحها على الاولى . مثاله ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠  
وهكذا بالعكس ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢ ويقال للاولى سلسلة صاعدة وللثانية  
سلسلة نازلة

٢١٥ في السلسلة الصاعدة نستعمل كل حلقة باضافة الفضل المشترك الى ما قبلها .  
فان كانت الحلقة الاولى ٣ والفضل المشترك ٢ تكون السلسلة ٣ ٥ ٧ ٩ ١١  
١٢ الى آخره . وان كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون الحلقة

الثانية ت + د والثالثة ت + د + د اى ت + د٢ والرابعة ت + د٢ + د  
 اى ت + د٢ والثالثة ت + د٢ + د اى ت + د٤ وهلم جرا . وتكون  
 السلسلة ت وت + د وت + د٢ وت + د٢ + د وت + د٤ الى آخره .  
 وان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين اى الحلقة الاولى ت والفضل  
 المشترك ت تصبح الثانية ت + د اى ت٢ والثالثة ت + د٢ اى ت٣  
 الى آخره . فتكون السلسلة ت ت٢ ت٣ ت٤ الخ

وفي السلسلة النازلة نستعمل كل حلقة بطرح الفضل المشترك من التي قبلها فان  
 كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون السلسلة ت - د  
 ت - د٢ ت - د٣ ت - د٤ الخ  
 ثم ان هذا العمل يطول بنا جدا في سلسلة طويلة ولكن اذا نظرنا الى سلسلة مثل  
 ت ت + د ت + د٢ ت + د٢ + د ت + د٤ الى آخره نرى ان د  
 اُضيفت الى ت مرارا تماثل عدة الحلقات الا واحدا لان

الحلقة الثانية في	ت + د
والثالثة	ت + د٢
والرابعة	ت + د٢ + د الى آخره
فتكون الحلقة الخمسون	ت + د٤٩
والحلقة المئة	ت + د٩٩
وان كانت نازلة تكون	ت - د٩٩

اى ان د تضاف الى ت مرارا تماثل عدة الحلقات الا واحدا . فان فُرض  
 ت = الحلقة الاولى ول = الاخرى وع = عدد الحلقات وف = الفضل  
 المشترك فلنا ل = ت + (ع - ١) × ف

٢١٦ لنا ما سبق هذه القاعدة وهي ان الحلقة الاخيرة من السلسلة الحسابية تعدل  
 الحلقة الاولى مضافة الى حاصل الفضل المشترك في عدة الحلقات الا واحدا . ومكنا  
 نستعمل اية حلقة فُرضت بان تحسبها الحلقة الاخيرة فتدل عليها العبارة السابقة  
 ثم ان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين تصبح العبارة ل = ت +  
 (ع - ١) × ت = ت + ت ع - ت اى ل = ت ع

٢١٧ نرى في العبارة السابقة اربع كميات اي ت الحلقة الاولى ل الاخرة  
ع عدد الحلقات ف الفضل المشترك . فان فرض منها ثلاث نتعلم منها  
الاخرى

- (١) لما تقدم ل = ت + (ع - ١) ف = الاخرة
- (٢) بالمقابلة ل - (ع - ١) × ف = ت = الاولى
- (٣) بالمقابلة والقسم في الاولى  $\frac{ل}{ع-١} = ف = \frac{ت}{١}$  الفضل المشترك
- (٤) ايضاً بالمقابلة والقسم في الاولى  $\frac{ل}{ع-١} = ١ + ع = \text{عدد الحلقات}$

ومن المعادلة الثالثة نتعلم اية عدة فرضت من اوساط حساية بين عددين لان  
عدة الحلقات تماثل الطرفين مع جميع الحلقات المتوسطة بينهما . فان فرض ط = عدة  
الواسط يكون ط + ٢ = ع اي عدة الحلقات . ثم بوضع ط + ٢ عوضاً عن ع  
في المعادلة الثالثة نصير  $\frac{ل}{ط+٢} = ف = \frac{ت}{١}$  الفضل المشترك  
مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٧ والفضل المشترك ٢ وعدة الحلقات  
٩ فما في الاخرة

ل = ت + (ع - ١) ف = ٧ + ٢ × (١ - ٩) = ٢١  
والسلسلة ٧ ١٠ ١٣ ١٦ ١٩ ٢٢ ٢٥ ٢٨ ٣١  
مفروض الحلقة الاخرة من سلسلة صاعدة ٦٠ وعدة الحلقات ١٢ والفضل  
المشترك ٥ فما في الاولى

ت = ل - (ع - ١) × ف = ٦٠ - ٥ × (١ - ١٢) = ٥٠  
استعلمت اوساط حساية بين ٤٣  
الفضل المشترك ٦ والسلسلة ١ ٧ ١٣ ١٩ ٢٥ ٣١ ٣٧ ٤٣

٢١٨ يلزم احياناً معرفة جميع حلقات سلسلة ويتوصل اليها بجميع الحلقات  
لا محالة . ولكن لنا طريقة اخصر من ذلك وهي انه لا بد ان يكون مجموع سلسلة صاعدة  
مثل ٢ ٥ ٧ ٩ ١١

مساوياً لمجموع سلسلة نازلة ١١ ٩ ٧ ٥ ٢  
فيكون مجموع الاثنين مضاعف مجموع احدهما فنجد مجموعهما مضاعف مجموع احدهما.  
ثم ان اخذ نصفه يكون مجموع احدهما

١١	٩	٧	٥	٣	فلفترض
٣	٥	٧	٩	١١	وعكسها
١٤	١٤	١٤	١٤	١٤	يكون المجموع

$$\begin{array}{rcl}
 \left. \begin{array}{l} \text{ومكلا} \\ \text{وعكسها} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ت} \\ \text{ت} + \text{د} \\ \text{ت} + \text{د} \\ \text{ت} + \text{د} \\ \text{ت} + \text{د} \end{array} \\
 \hline
 \text{المجموع} \quad \text{ت} + \text{د} \quad \text{ت} + \text{د} \quad \text{ت} + \text{د} \quad \text{ت} + \text{د}
 \end{array}$$

فلما من ذلك هذه القضية وفي ان مجموع طرفي سلسلة يعدل مجموع اي حلقتين  
فرضنا على بعد واحد من الطرفين. ولكي نتعلم مجموع الحلقات في السلسلتين لا يلزم الا  
ان تضرب مجموع الطرفين - في عدد الحلقات اي  $14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 14 \times 5$

وفي الثانية يكون المجموع  $(\text{ت} + \text{د}) \times 5$  وهذا مضاعف مجموع حلقات سلسلة  
واحدة. ثم ان فرض  $\text{ت} = \text{الاولى ل} = \text{الاخيرة ح} = \text{عدد الحلقات وم} = \text{مجموع}$   
الحلقات  $11 = \text{م} = \frac{\text{ت} + \text{ل}}{2} \times \text{ع}$  وهذه المعادلة مشتقة على هذه القاعدة وفي ان مجموع  
حلقات سلسلة حسابية يعدل نصف مجموع الطرفين في عدد الحلقات

ما هو مجموع سلسلة الاعداد الطبيعية اي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ الى ١٠٠٠  
الجواب  $\text{م} = \frac{\text{ت} + \text{ل}}{2} \times \text{ع} = 1000 \times \frac{1 + 1000}{2} = 500500$

ثم ان عوضنا عن ل في هذه المعادلة بقيمتها في ع ٢١٧ نصير المعادلة  
(١)  $\text{م} = \frac{\text{ت} + (1 - \text{ع})}{2} \times \text{ع}$  وفيها اربع كميات اي الحلقة الاولى والنقل  
المشترك وعدة الحلقات ومجموعها. وان فرض منها ثلاث نستعلم منها الرابعة. فبالتحويل  
نصير

$$(2) \text{ ت} = \frac{22 - \text{ع} + \text{ع}^2}{\text{ع}} = \text{الحلقة الاولى}$$

$$(2) \text{ ف} = \frac{22 - \text{ع} + \text{ع}^2}{\text{ع} - 22} = \text{النقل المشترك}$$

$$(3) \text{ ع} = \frac{22 - \text{ت} + \text{ت}^2}{\text{ت} - 22} = \text{ف}$$



يتفرع من هذه المعادلات والمنفروضات عشرون حالاً نحلُّ بواسطة العبارات المذكورة او بما يتفرع منها وهذه الاحوال مذكورة في هذا الجدول

مفروض	مطلوب	عبارة
١. ت ف ع		$ل = ت(ع - ١) ف$
٢. ت ف م	ل	$ل = ١ ف + ٢ ل + ٢(ت - ١) ف$
٣. ت ع م		$ل = ٢ ع - ت$
٤. ف ع م		$ل = ٢ ع + ٢(١ - ع) م$
٥. ت ف ع		$٢ = ١ ع + ٢ ل + ت(ع - ١) ف$
٦. ت ف ل		$٢ = ٢ ل + ت(١ - ع) ف$
٧. ت ع ل	م	$٢ = ٢ ل + ٢ ع م$
٨. ف ع ل		$٢ = ١ ع + ٢ ل - ت(ع - ١) ف$
٩. ت ع ل		$ف = ٢ ل - ٢ ع$
١٠. ت ع م	ف	$ف = ٢ ع - ٢ ل + ت(١ - ع) ف$
١١. ت ل م		$ف = ٢ ل - ٢ ع$
١٢. ع ل م		$ف = ٢ ل - ٢ ع$
١٣. ف ع ل		$ت = ل - (ع - ١) ف$
١٤. ف ع م	ت	$ت = ٢ ع - ٢ ل + (١ - ع) ف$
١٥. ف ل م		$ت = ١ ف + ٢ ل + ٢(١ - ع) ف$
١٦. ع ل م		$ت = ٢ ل - ٢ ع$
١٧. ت ف ل		$ع = ٢ ل + ٢(١ - ع) ف$
١٨. ت ف م	ع	$ع = ٢ ل + ٢(١ - ع) ف + ٢(١ - ع) م$
١٩. ت ل م		$ع = ٢ ل + ٢(١ - ع) ف$
٢٠. ف ل م		$ع = ٢ ل + ٢(١ - ع) ف + ٢(١ - ع) م$

(١) مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٢ والفضل المشترك ٢ وعدد

الجواب ٤٤٠

الحلقات ٢٠ فاما هو مجموعها

(٢) اذا وُضع مئة حجر على خط مستقيم بين كل اثنين منها ذراعٌ واحدة فكم يمتد من يجمع الجميع في مكانٍ بين وبين الحجر الأول ذراع اذا كان كل مرفق يحمل حجراً واحداً  
الجواب ١٠١٠٠ ذراع

(٣) ما هو مجموع ١٥٠ حلقة من سلسلة صاعدة مثل  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$  الى آخره  
الجواب ٢٧٧٥

(٤) اذا كان مجموع سلسلة حسابية ١٤٥٥ والحلقة الاولى ٥ وعدد الحلقات ٢٠ فما هو الفضل المشترك  
الجواب ٣

(٥) مجموع سلسلة ٥٦٧ والحلقة الاولى ٧ والفضل المشترك ٢ فما هو عدد الحلقات  
الجواب ٢١

(٦) ما هو مجموع ٢٢ حلقة من هذه السلسلة ١  $\frac{1}{2}$  ٢  $\frac{1}{3}$  ٣  $\frac{1}{4}$  ٤  $\frac{1}{5}$  ٥  $\frac{1}{6}$  ٦  $\frac{1}{7}$  ٧  $\frac{1}{8}$  ٨  $\frac{1}{9}$  ٩  $\frac{1}{10}$   
الجواب ٢٨٠

(٧) رجل اشترى ٤٧ كتاباً وكان ثمن الأول ١٠ غروش وثنى الثاني ٢٠ غرشاً والثالث ٥٠ غرشاً ولم يجرأ فكم بلغ ثمن الجميع  
الجواب ٢٢٠٩٠ غرشاً

(٨) رجل اعطى صدقة للفراء في اليوم الأول من السنة غرشاً وفي الثاني غرشين وفي الثالث ثلاثة غروش ولم يجرأ فكم اعطى في السنة  
الجواب ٦٦٧٩٥

(٩) رجل اشترى اثواباً وكان ثمن الأول دينارين والثاني ٤ والثالث ٦ ولم يجرأ الى آخره وبلغ ثمن الجميع ١١٠ دنانير فكم ثوباً اشترى  
الجواب ١٠ اثواب

٢١٩ في سلسلة اعلاية وترية مثل ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الى آخره تكون الحلقة الأخيرة اقل بواحد من مضاعف عدد الحلقات ابدأ لان  $ل = ت + (ع - ١) ف$  حسباً تقدم. وفي السلسلة المفروضة  $ت = ١$  و  $ف = ٢$  فتكون المعادلة  $ل = ١ + (ع - ١) \times ٢ = ع - ١$  وكذلك في سلسلة اعلاية وترية مثل ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الى آخره مجموع الحلقات يعدل مربع عدد الحلقات لان  $م = \frac{1}{2}(ت + ل \times ع)$  وفي هذه السلسلة  $ت = ١$  وحسباً تقدم  $ل = ع - ٢ - ١$  فتصير المعادلة  $م = \frac{1}{2}(١ + ع - ٢ + ١ \times ع)$

مثاله

$$\begin{cases} ٤ = ٢ + ١ \\ ٩ = ٥ + ٢ + ١ \\ ١٦ = ٧ + ٥ + ٢ + ١ \end{cases}$$

مربعات عدد الحلقات

٢٢٠ اذا كان ص٢ان من كيات في سلسلة حساية تكون مجتمعاتها او فضلاتها  
ايضاً على سلسلة حساية لان ذلك جمع تناسبات او طرحها فقط

مثال ٢ ٦ ٩ ١٢ ١٥ ١٨ ٢١ التناسب = ٣

٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ ١٤ التناسب = ٢

المجموع ٥ ١٠ ١٥ ٢٠ ٢٥ ٣٠ ٣٥ التناسب = ٥

الفضلة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ التناسب = ١

واذا ضرب جميع حلفات سلسلة حساية في كبر واحد او انقسم عليها تكون  
الحواصل او الخواارج على سلسلة حساية ايضاً لان ذلك كضرب تناسبات او قسمتها

في سلسلة ٢ ٥ ٧ ٩ ١١ اذا ضرب في ٤

نصير ١٢ ٢٠ ٢٨ ٣٦ ٤٤ ثم اذا انقسم هلا على ٢

نصير ٦ ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ الى آخره

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حساية مجتمعها ٥٦ ومجتمع مربعاتها ٨٦٤

ك = الثاني ي = الفضل المشترك فتكون السلسلة ك - ي ك ك + ي

ك + ٢ ي

وبالشروط (ك - ي) + ك + (ك + ي) + (ك + ٢ ي) = ٥٦

وايضاً (ك - ي) + ك + (ك + ي) + (ك + ٢ ي) = ٨٦٤

بالاولى ٤ ك + ٢ ي = ٥٦

بالثانية ٤ ك + ٤ ي + ٦ ي = ٨٦٤

وبغوبل هذه المعادلات لنا ك = ١٢ ي = ٤

والاعداد ٨ ١٢ ١٦ ٢٠

(٢) ثلاثة اعداد في سلسلة حساية مجتمعها ٩ ومجتمع كعوبها ١٥٢ فهاي هذه

الاعداد الجواب ١ و ٢ و ٥

(٣) ثلاثة اعداد في سلسلة حساية مجتمعها ١٥ ومجتمع مربعي الطرفين ٥٨ فهاي

الاعداد

(٤) اربعة اعداد في سلسلة حساية مجتمع مربعي الاولين ٢٤ ومجتمع مربعي

الآخرين ١٢٠ فهاي الاعداد الجواب ٢ ٥ ٧ ٩

(٥) مطلوب عدد ذو ثلاثة ارقام على سلسلة حساية واذا انقسم العدد على مجتمع

ارقامه يكون الخارج ٣٦ واذا اضيف اليه ١٦٨ ينتقل ترتيب الارقام

لفرض الازمام ك-ى وك وك+ى فيكون العدد ١٠٠ (ك-ى)  
 $١٠ + ك + (ك + ى) = ١١١ ك - ١١ ى$   
 وبالشروط  $٢٦ = \frac{١١١ ك - ١١ ى}{٣}$   
 و  $١١١ ك - ١١ ى = ١٦٨ + ١٠٠ = ١٠٠ (ك + ى) + ١٠ ك + (ك - ى)$   
 $ك = ٣ ى = ١$  والعدد ٢٢٤

(١) مطلوب اربعة اعلااد في سلسلة حسابية مجتمع مربعي الطرفين فيها ٢٠٠  
 ومجتمع مربعي الوسطين ١٢٦

(٢) ساع سعى الى مكان بُعْدُهُ ١٩٨ ميلاً. ففي اليوم الاول قطع من المسافة ٢٠  
 ميلاً وفي الثاني ٢٨ ميلاً وفي الثالث ٢٦ ميلاً ولمْ جراً في كم يوم قطع المسافة كلها  
 الحلقة الاولى = ٢٠ الفصل المشترك = ٢ - الجواب ٩

(٣) مطلوب اعلااد على سلسلة حسابية فضلها المشترك ٢ ومجموعها يعدل عدة  
 الحلقات ثمان مرات واذا اضيف ١٢ الى الحلقة الثانية وانقسم المجتمع على عدة الحلقات  
 يكون الخارج الحلقة الاولى

لفرض ك = الاولى ى = عدة الحلقات ك + ٢ = الثانية ك + (ى - ١)  
 = ٢ الاخيرة

$$\text{حسباً تقدم } م = \frac{٢ + (١ - ع) + ٢}{٢} \times ع = ك ى = ع$$

$$\text{ثم بالتعويض } م = \frac{٢ + (١ - ى) + ٢}{٢} \times ى = ك ى + ى - ١$$

$$\text{وبالمسئلة } ك ى + ى - ى = ٨ ى - ١ = ٩ - ك$$

$$\text{وايضاً } ك = \frac{١٢ + ٢ + ٢}{٢ - ١} = ك = ٥ \text{ او } ٢$$

$$ى = ٤ \text{ او } ٦$$

والاعلااد ٥ ٧ ٩ ١١ او ٢ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٢

(١) مطلوب اربعة اعلااد على سلسلة حسابية مجتمعها ٢٨ وحاصلها ٥٨٥

(١٠) جسم سقط في الثانية الاولى ١٦ قدماً وفي كل ثانية بعد الاولى سقط ٢٢  
 قدماً أكثر مما سقط في الثانية السابقة فكم قدماً يسقط في الثانية الاخيرة اذا بقي ساقطاً  
 ٢٠ دقيقة وك في المدة كلها الجواب في الاخيرة ٦٢٤ قدماً والكل ٦٤٠٠ قدم

(١١) سافر زيد وفي اليوم الاول من سفره قطع ميلاً واحداً وفي اليوم الثاني قطع  
 ميلين وفي اليوم الثالث ٣ اميال ولمْ جراً وبعد ٥ ايام لحقه عمرو وقطع ١٢ ميلاً كل  
 يوم ففي كم يوم يلحق زيدا الجواب ١٥ يوماً او ٨ ايام

اي جذرا المعادلة من الدرجة الثانية كلاهما ايجابيان في المسئلة السابقة  
(١٢) قطع زيد في اليوم الاول ميلاً واحداً وفي الثاني ميلين وفي الثالث ثلاثة  
اميال ثم بعد ا يوم سافر عمرو وقطع ب ميلاً كل يوم ففي كم يوم يلحق زيداً

$$\frac{2b - 1 + \sqrt{1 + 4b(21 - b)}}{2} = \text{الجواب الايام}$$

(١٣) على اي شرط لا يلحق عمرو زيداً ابناً الجواب اذا كان  $\frac{2b - 1}{8} < 1$

ففي المسئلة السابقة او تأخر عمرو يوماً واحداً لما لحقه زيد ابناً

(١٤) سافر سائح في اليوم الاول ميلاً واحداً وفي الثاني ثلاثة اميال وفي الثالث

خمسة اميال وبعد ثلاثة اميال تبعة آخر وقطع في اليوم الاول ١٢ ميلاً وفي الثاني ١٢  
ميلاً ولم يجرأ في كم يوم يلحق الاول الجواب في يومين او في ٩ ايام

### في السلسلة الهندسية

٢٢١ السلسلة الهندسية هي نسبة هندسية متصلة كما ان الحسابية هي نسبة حسابية

متصلة . فالاعداد ٦٤ ٣٢ ١٦ ٨ ٤ هي على نسبة هندسية متصلة

واذا انقسم كل جزء على النسب المشترك يخرج الجزء الذي يتلو . مثاله  $\frac{72}{3} = ٢٤$

و  $\frac{٢٤}{١٦} = \frac{٣}{٢}$  الى آخره . وهكذا اذا انعكس الترتيب وصار المقسوم عليه

المشترك مضروباً فيه . مثاله ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤ الى آخره  $٨ = ٢ \times ٤$

و  $١٦ = ٢ \times ٨$  و  $٣٢ = ٢ \times ١٦$  و  $٦٤ = ٢ \times ٣٢$  الخ

وانا في ذلك هذه القضية وهي ان الكميات التي يهبط بمقسوم عليه مشترك او تعلق

بمضروب فيه مشترك هي على سلسلة هندسية . ويسمى المقسوم عليه او المضروب فيه

النسب المشترك . وان جعلنا المقسوم عليه كسراً يصبح ان نحسبه المضروب فيه ابناً كما

في السلسلة السابقة فانها يهبط بالقسمة على ٢ او بالضرب في ٢

٢٢٢ في السلسلة الهندسية الصاعدة تعرف كل حلقة بضرب النسب المشترك

في التي قبلها . فان فرضت الاولى ت والنسب المشترك ب تكون الحلقات على

هذا النسق ت  $\times$  ب = ت ب = الثانية ت  $\times$  ب = ت ب = الثالثة

ت ب  $\times$  ب = ت ب = الرابعة ت ب  $\times$  ب = ت ب = الخامسة الخ وتكون

السلسلة ت ب ت ب ت ب ت ب الخ

وإذا كانت الأولى والتناسب متساويين تكون السلسلة سرّدت قوّات اي تكون الأولى ب والتناسب ب فتكون السلسلة ب ب<sup>١</sup> ب<sup>٢</sup> ب<sup>٣</sup> ب<sup>٤</sup> الخ

٢٢٣ في السلسلة النازلة نستعمل كل حلقة بقسمة التي قبلها على التناسب المشترك او ضربها في التناسب المشترك الكسري. فان كانت الحلقة الأولى ت ب<sup>١</sup> بالقسمة على ب نصير ت ب<sup>٢</sup> او بالضرب في ب<sup>١</sup> نصير ت ب<sup>١</sup> × ب = ت ب<sup>٢</sup> = ت ب<sup>١</sup>

وتكون السلسلة ت ب<sup>١</sup> ت ب<sup>٢</sup> ت ب<sup>٣</sup> ت ب<sup>٤</sup> ت ب<sup>٥</sup> الخ. وان كانت الأولى ت والتناسب ب تكون السلسلة ت ب<sup>١</sup> ت ب<sup>٢</sup> ت ب<sup>٣</sup> ت ب<sup>٤</sup> الخ. وان نظرنا الى السلسلة

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

ت ت ب ت ب<sup>١</sup> ت ب<sup>٢</sup> ت ب<sup>٣</sup> ت ب<sup>٤</sup> الخ

نرى ان دليل القوة في كل حلقة اقل من عدد تلك الحلقة بواحد. فنرى في الثانية الدليل ١ وفي الثالثة الدليل ٢ وهلمّ جراً. فان فرض ت = الحلقة الأولى ل = الاخيرة ب = التناسب وع = عدد الحلقات لنا ل = ت ب<sup>١-ع</sup> فلنا من ذلك هذه القضية وهي ان الحلقة الاخيرة من سلسلة هندسية تعدل الحلقة الأولى مضروبة في قوّم التناسب دليلاً اقل من عدد الحلقات بواحد. ومتى كانت الأولى والتناسب متساويين نصير المعادلة ل = ب ب<sup>١-ع</sup> = ب<sup>ع</sup>

٢٢٤ اذا عُرِفَت ثلاث من الكميات المذكورة اي من ت ب ل ع تُعرَف منها

الآخرى

(١) لنا ماسبق ل = ت ب<sup>١-ع</sup> = الاخيرة

(٢) بالقسمة ت = ب<sup>ع</sup> ل = الاولى

(٣) بالقسمة والتجذير ب = (ت<sup>١-ع</sup> ل<sup>١-ع</sup>) = التناسب

اما عدة الحلقات فتستعمل من هذه المعادلة بالتناسب اي اللوغرتمات وليس هذا موضعاً لذكر طريقها

ثم اننا بالمعادلة الاخيرة نجد اية عدّة فرضت من اوصاف هندسية بين عددين. فان فرض ط = الاوصاف يكون ط + ٢ عدد الحلقات اي ط + ٢ = ع ثم







المقروض	المطلوب	المباراة
١ ث ب ع		$ل = ث ب^{١-ع}$
٢ ث ب م	ل	$ل = \frac{ث + (ب - ١)}{٢}$
٣ ث ع م		$ل (م - ل) = ث^{١-ع} (م - ث)$
٤ ب ع م		$ل = \frac{ب (١ - ب)}{١ - ع}$
٥ ث ب ع		$ث = \frac{ب - ع}{ب - ١}$
٦ ث ب ل		$ل = \frac{ب - ١}{ب - ث}$
٧ ث ع ل	٢	$٢ = \frac{ل^{١-ع} - ل^{١-ع} م}{ل^{١-ع} - ل^{١-ع} م}$
٨ ب ع ل		$٢ = \frac{ل ب - ع ل}{ب - ع - ١}$
٩ ث ع ل		$ب = \frac{ل^{١-ع} - ل^{١-ع} م}{ل^{١-ع} - ل^{١-ع} م}$
١٠ ث ع م	ب	$ث ب^{١-ع} - ب م = ث - م$
١١ ث ل م		$ب = \frac{ث - م}{ل - ١}$
١٢ ع ل م		$(م - ل) (ب - ع) م^{١-ع} = ل - ١$
١٣ ب ع ل		$ث = \frac{ل}{ب - ع}$
١٤ ب ع م	ث	$ث = \frac{ب (١ - ب)}{١ - ع}$
١٥ ب ل م		$ث = ل ب - (ب - ١) م$
١٦ ع ل م		$ث (م - ث) = ل^{١-ع} (ل - م)$
١٧ ث ب ل		$ع = \frac{نسب ل - نسب ث}{نسب ب}$
١٨ ث ب م	ع	$ع = \frac{نسب [ث + (ب - ١) م] - نسب ث}{نسب ب}$
١٩ ث ل م		$ع = \frac{نسب ل - نسب ث}{١ + \frac{نسب (م - ث) - نسب (م - ل)}{نسب ب}}$
٢٠ ب ل م		$ع = \frac{نسب ل - نسب [ل ب - (ب - ١) م]}{١ + \frac{نسب ب}{نسب ب}}$

### مسائل

(١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموعها ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤

لتفرض الاعداد ك وى ول

بالشروط ك: ي: ي: ل: اي: كل: ي:

وك + ي + ج = ١٤ وك + ي + ج = ١٤

(٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية حاصلها ٦٤ ومجموع كمياتها ٥٨٤

لنفرض ك = الحلقة الأولى وى = المناسب فتكون السلسلة ك كى كى

بالكرط الاول ك X كى X كى اى كى = ٦٤

بالكافي ك + ك<sup>١</sup> + ك<sup>٢</sup> + ك<sup>٣</sup> = ٥٨٤ ك = ٢ ي = ٢

والاعداد ٢ ٤ ٨

(٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاول والثالث ٥٢ ومربع

المجاب ۲۰۱۰

الوسط ١٠٠

(٤) مطلوب أربعة أعداد على سلسلة هندسية مجتمع الأولين ٥ او مجتمع الآخرين ٦٠

لنفرض السلسلة  $K \ K^2 \ K^3 \dots$  الأعداد ٥ ١٠ ٢٠ ٤٠

(٥) رجل قسم ٢١٠ دنانير بين بنوه الثلاثة وكانت اقسامهم على سلسله هندسية.

وكان الاول ٩٠ ديناراً اكثر من الاخير فكم كان قسم كل واحد منهم

(٦) المطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية وفضلة اكبرها واصغرها ١٥ ونسبة

فضلة مربى الأكبر والأصغر الى مجموع مربعات الاعداد الثلاثة :: ٧:٥

الاجواب ٥ ١٠ ٢٠

(٧) مطلوب أربعة أعداد على سلسلة هندسية الثانية منها أقل من الرابعة بأربعة

وعشرين ونسبة مجسم الطرفين : مجسم الوسطين :: ٢ : ٧

الجواب ا ٢ ١ ٢٧

(و) رجلا. استخدم خادماً الى مدة ١١ سنة. ووعده ان يعطيه في السنة الاولى

حبة قمح، غلة هذه الحبة في الثانية، وغلة الغلة في الثالثة، ولمّا جُزّأ إلى نهاية المدة المذكورة.

فان اثرت كل حبة عشر حبات كل سنة فكم حبة تبلغ

المجواب ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

- (١) رجل هندي اخترع الشطرنج وقدمه الى الملك فاعجبه جداً وقال له مها طلبت اعطوك. فطلب الرجل حبة قمح للبيت الأول من رقعة الشطرنج وحبين الثاني واربع حبات الثالث وثمانى للرابع وهكذا الى الاربعة والسعين يتتاً فكم حبة اخذ
- (١٠) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعا ٢٦ وحاصل الأول في
- الجواب ١٢ ٨ ٦ الثالث ٧٢
- (١١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعا الأول والثالث ١٨ وحاصل
- الجواب ٦ ٨ ١٢ الثلاثة ٥٧٦
- (١٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية فضلة فضلتها ٢ وثلاثة امثال حاصل
- الجواب ٦ ٨ ١٢ الأول في الثالث ٢١٦
- (١٣) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعا ١٨٩ ومجموع الثالث والخامس ٥٤
- الجواب ٢ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦
- (١٤) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعا ١٨٩ ومجموع الوسطين ٢٦
- الجواب ٢ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦

## الفصل التاسع عشر

في غير المتناميات وفظير غير المتناهي

٢٢٧ غير المتناهي بحسب مفهوم المطلق شيء لا ينبل زيادة ولا ينوم له زيادة. وهذا هو المراد به في الاديات والامليات. واما في العدد فلا يمكن تصوره اذ يمكن ان يزداد عدد حتى يتجاوز اي عدد ففرض. وبحسب ذلك يكون العدد الاعظم ما يستحيل الوصول اليه. ومما زيد عدد يمكن ان ينوم له زيادة فيكون المراد به غير المتناهي في التعليمات غير المراد به في غيرها كما مر

٢٢٨ الكمية التعليمية اذا توفقت زيادتها فوق حدود مفروضة سميت غير متنامية. والمراد بالحدود المفروضة ما يستطيع العقل ادراكه. وعلى هذا المعنى تكون الاعداد الطبيعية التي هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الى آخره غير متنامية لانها مازدت

قبل الزيادة أيضاً. وبناءً على ذلك يصح أن يقال في غير متناه أنه اعظم من غير متناه آخر. مثاله ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الى غير نهاية و ٤ ٤ ٤ ٤ ٤ الى غير نهاية. فمما زاد السرّان يكون الثاني مضاعف الأول وهكذا ت + ت + ت + ت + ت الخ و ١ + ١ + ١ + ١ + ١ الخ. يكون الثاني تسعة امثال الأول

يجب ان نميز بين كمية غير متناهية وعدة اجزاء غير متناهية لانه يمكن ان تعدد  
الاجزاء الى غير نهاية وتكون الكمية كلها متناهية وصغيرة. مثاله اذا أخذ واحد ثم نصفه  
ثم ربعه ولم جراً يكون  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$  الى آخره. فيها تعددت الاجزاء  
لا يمكن ان تفوق الواحد. وهكذا  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$  الى آخره لا يمكن ان  
تفوق الخاتمة

٢٢٩ اذا هبطت كبة نحت حذر مفروض سُميت نظير غير المتناهي. مثاله  $\frac{1}{1}.$

وعلى المعنى المذكور تُقسم كمية الى غير نهاية. والكمية التي هي اصغر ما يكون لا يمكن الوصول اليها اذ لا يمكن تجزئتها الى حذ لا يوم تجزئها ايضا وعلى هذا المعنى ايضا يمكن ان يكون نظير غير متناه اصغر من نظير غير متناه آخر. مثاله

$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{13} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{17} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{19} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{21} \quad \frac{1}{22} \quad \frac{1}{23} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{26} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{29} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{31} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{33} \quad \frac{1}{34} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{37} \quad \frac{1}{38} \quad \frac{1}{39} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{41} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{43} \quad \frac{1}{44} \quad \frac{1}{45} \quad \frac{1}{46} \quad \frac{1}{47} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{49} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{1}{51} \quad \frac{1}{52} \quad \frac{1}{53} \quad \frac{1}{54} \quad \frac{1}{55} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{57} \quad \frac{1}{58} \quad \frac{1}{59} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{61} \quad \frac{1}{62} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{65} \quad \frac{1}{66} \quad \frac{1}{67} \quad \frac{1}{68} \quad \frac{1}{69} \quad \frac{1}{70} \quad \frac{1}{71} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{73} \quad \frac{1}{74} \quad \frac{1}{75} \quad \frac{1}{76} \quad \frac{1}{77} \quad \frac{1}{78} \quad \frac{1}{79} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{81} \quad \frac{1}{82} \quad \frac{1}{83} \quad \frac{1}{84} \quad \frac{1}{85} \quad \frac{1}{86} \quad \frac{1}{87} \quad \frac{1}{88} \quad \frac{1}{89} \quad \frac{1}{90} \quad \frac{1}{91} \quad \frac{1}{92} \quad \frac{1}{93} \quad \frac{1}{94} \quad \frac{1}{95} \quad \frac{1}{96} \quad \frac{1}{97} \quad \frac{1}{98} \quad \frac{1}{99} \quad \frac{1}{100}$

الثاني نصف الاول مما تعددت الاجزاء. وهكذا

$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{13} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{17} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{19} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{21} \quad \frac{1}{22} \quad \frac{1}{23} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{26} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{29} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{31} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{33} \quad \frac{1}{34} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{37} \quad \frac{1}{38} \quad \frac{1}{39} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{41} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{43} \quad \frac{1}{44} \quad \frac{1}{45} \quad \frac{1}{46} \quad \frac{1}{47} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{49} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{1}{51} \quad \frac{1}{52} \quad \frac{1}{53} \quad \frac{1}{54} \quad \frac{1}{55} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{57} \quad \frac{1}{58} \quad \frac{1}{59} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{61} \quad \frac{1}{62} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{65} \quad \frac{1}{66} \quad \frac{1}{67} \quad \frac{1}{68} \quad \frac{1}{69} \quad \frac{1}{70} \quad \frac{1}{71} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{73} \quad \frac{1}{74} \quad \frac{1}{75} \quad \frac{1}{76} \quad \frac{1}{77} \quad \frac{1}{78} \quad \frac{1}{79} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{81} \quad \frac{1}{82} \quad \frac{1}{83} \quad \frac{1}{84} \quad \frac{1}{85} \quad \frac{1}{86} \quad \frac{1}{87} \quad \frac{1}{88} \quad \frac{1}{89} \quad \frac{1}{90} \quad \frac{1}{91} \quad \frac{1}{92} \quad \frac{1}{93} \quad \frac{1}{94} \quad \frac{1}{95} \quad \frac{1}{96} \quad \frac{1}{97} \quad \frac{1}{98} \quad \frac{1}{99} \quad \frac{1}{100}$

٢٢٠ إذا حدث في الاعمال الجبرية كمية نظير غير المتناهي يمكن طرحها من العمل بدون ان يجعل فرقا في الحاصل اذا لا اعتبار لما هو صغير حتى لا يشعر بحضوره او غيابه . مثاله في تحويل  $\frac{1}{10}$  الى كسر عشري فان قسمنا الصورة على المخرج يكون لنا  $\frac{1}{10}$  وفي تعدل  $\frac{1}{10}$  تقريبا و  $\frac{22}{100}$  اكثر تقريبا و  $\frac{222}{1000}$  اكثر تقريبا ولم جراً حتى يصبر الفرق بين  $\frac{1}{10}$  والكسر العشري صغيراً جداً لا اعتباراً

ونرى ما سبق ان كمية ربما تقترب الى اخرى الى غير نهاية بدون ان تبلغ اليها . مثاله في تحويل  $\frac{1}{2}$  الى كسر عشري لها امتداد في منازل الكسر العشري لا يمكن ان يبلغ الى  $\frac{1}{2}$  تماماً . ومما تعددت المنازل فلا بد ان يبقى فيها وبين  $\frac{1}{2}$  فرق ولو

كان صغيراً الى غير نهاية . وفي كميات من هذا النوع سُميت احدهما حد الاخرى . فان  
 $\frac{1}{3}$  هو حد  $\frac{2}{3}$  الى آخره و  $\frac{1}{3}$  هو حد  $\frac{2}{3}$  الى غير نهاية . ثم ان  
 نظير غير المنتهي وان لم يكن له اعتبار في ذاته ان وقع مضروباً فيه او مقسوماً عليه  
 يكون له احياناً اعتبار كلي . واذا كان نظير غير المنتهي لا يفرق عن صفر بما يشعر  
 به فوّدّ عليه احياناً بصفر وبُدِّل على غير المنتهي بهذه العلامة .

٢٢١ لما كان غير المنتهي اعظم من نظير غير المنتهي بما لا يوصف كان يمكن  
 عند ارتباطها بعلامة الجمع او الطرح اخراج نظير غير المنتهي من العمل بالكلية . وهكذا  
 اذا ارتبط نظير غير المنتهي بكمية متناهية . ولكن اذا ضرب غير متناه في متناه يزداد  
 بذلك غير المنتهي كبقية الكميات . مثاله  $2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2$  الخ  $4 \times$  يكون  
 الحاصل  $8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8$  الخ اي اربعة امثال الاولى . واذا انقسم غير متناه على  
 متناه ينتص الاول كبقية الكميات . مثاله  $6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6$  الخ  $2 : 2 = 1$  الخ  $2 : 2 = 1$   
 الخ اي نصف الاولى . وان ضربت كمية متناهية في نظير غير المنتهي  
 يكون الحاصل نظير غير المنتهي . مثاله اذا فرض  $ل =$  المتناهية و  $=$  نظير غير  
 المنتهي لنا  $ل \times =$  . لانه لو كان المضروب فيه واحداً لكان الحاصل مساوياً  
 للمضروب . وان كان اقل من واحد يكون الحاصل اقل من المضروب . وهنا فرضنا  
 المضروب فيه اقل من واحد الى غير نهاية فيكون الحاصل اقل من المضروب فيه الى  
 غير نهاية . واذا انقسمت كمية متناهية على نظير غير المنتهي يكون الخارج غير متناه  
 اي  $ل = \infty$  لانه كلما قلّ المقسوم عليه زاد الخارج وهنا قد قلّ المقسوم عليه الى غير  
 نهاية فزاد الخارج الى غير نهاية ومثله  $2 = 2 + 6$  و  $2 = 2 + 6$  و  $20 = 20 + 6$  و  
 $200 = 200 + 6$  و  $2000 = 2000 + 6$  الخ واذا انقسمت متناهية على غير متناه يكون  
 الخارج نظير غير المنتهي اي  $ل = \infty$  . لانه كلما زاد المقسوم عليه قلّ الخارج . فان زاد  
 المقسوم عليه الى غير نهاية قلّ الخارج الى غير نهاية



(٢) حول  $\frac{٤٢١}{١٧٢}$  الى كسر متصل

(٣) حول  $\frac{٢٥١}{٧١٤}$  الى كسر متصل

(٤) حول  $\frac{١٢}{٤٢١}$  الى كسر متصل

لاجل استعمال قيمة كسر متصل حول الصحيح والكسر في المخرج الاخير الى كسر غير صحيح ثم اقلبه اي اجعل المخرج صورة والصورة مخرجاً ثم حول الصحيح في المخرج قبله الى كسر من اسم الكسر الذي قد وجدته واجمع الصورتين

$$(١) \text{ استعمل قيمة هذا الكسر المتصل } \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \text{ و } \frac{12}{4} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$$

$$(٢) \text{ استعمل قيمة هذا الكسر المتصل } \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$(٣) \text{ استعمل قيمة هذا الكسر المتصل } \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

بعد تحويل كسر الى كسر متصل تستعمل له قيمة تقريبية باخذ بعض الاجزاء الاول من ذلك الكسر لاجل تلك القيمة مثاله في  $\frac{١١٤}{٢٧٤}$  له قيمة تقريبية  $\frac{1}{3}$  وهو الجزء الاول من الكسر المتصل واذا اخذ منه جزآن تكون  $\frac{٢٢}{٢٧}$  وذلك اكثر تقريباً وثلاثة اجزاء تكون اكثر تقريباً

$$\text{الجواب } \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4}$$

$$(١) \text{ استعمل قيمات تقريبية للكسر } \frac{٥٢٢}{١١٩٣}$$

$$(٢) \text{ استعمل قيمات تقريبية للكسر } \frac{١١٥}{٤٢٤}$$

$$(٣) \text{ استعمل قيمات تقريبية للكسر } \frac{١١٩}{٤٠٩}$$

وعلى هذه الكيفية تستعمل قيمات تقريبية للكسور الكثيرة المنازل وذلك كثير الفائدة في بعض مسائل علم الهيئة

(٤) تناسب محيط الدائرة الى قطرها هو ٣١٤١٥٩٢٦ فاستعمل لذلك قيمات

$$\text{الجواب } \frac{٢٢}{٧} \frac{٢٢٢}{١٠٩} \frac{٢٥٥}{١١٢}$$

تقريبية

- (٥) في ٨٧٦٦٩ سنة تقترن الأرض وعطارد ٢٧٧٢٨٧ مرة فاستعلم قيمات  
 تقريبية للكسر  $\frac{٨٧٦٦٩}{٢٧٧٢٨٧}$  الجواب  $\frac{١}{٣} \frac{٦}{١٩} \frac{٧}{٢٣} \frac{١٢}{٤١} \frac{٢٢}{١٠٤}$
- (٦) في ٥٧٥٥١ سنة تقترن الأرض والزهرة ٢٦٠٠٠ مرة فاستعلم قيمات  
 تقريبية للكسر  $\frac{٥٧٥٥١}{٢٦٠٠٠}$  الجواب  $\frac{٨}{٥} \frac{٢٢٥}{١٤٧}$
- (٧) في ٢٩٥٢٠٦ سنة يدور القمر ٢٦٥٢٤٢٢ دورة قانونية فاستعلم قيمة تقريبية  
 للكسر  $\frac{٢٩٥٢٠٦}{٢٦٥٢٤٢٢}$  الجواب  $\frac{١٩}{٢٣٥}$

## الفصل الحادي والعشرون

في المبادلات والتراكيب

يراد بالمبادلات الترتيب المختلفة التي يمكن ترتيب هذه كميات عليها . مثاله

ا ب ت

ا ت ب

ب ا ت

ب ت ا

ت ا ب

ت ب ا

الحروف الثلاثة ا ب ت يمكن ترتيبها

ا ب

ا ت

ب ا

ت ب

ت ا

إذا أخذت اثنين اثنين يمكن ترتيبها

ا

ب

ت

إذا أخذت فرداً فرداً ترتب



لأجل استعمال عدة احرف = ن متخذة م وم مرة  
لفرض ا ب ت ث ..... س = ن حرف فالمبادلات اذا أخذت الاحرف  
فرداً فرداً تعدل عدة الاحرف اي ن وعدة المبادلات اذا أخذت اثنين اثنين هي  
ن (ن - ١) لانه اذا ابقينا حرفاً ١ مثلاً بقي (ن - ١) حرف

اي ب ت ث ..... س

ثم اذا وضعنا ١ قبل كل واحد لنا

ا ب ا ت ا ث ..... اس

اي لنا مبادلات ن - ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها يكون الانف الاول  
واذا فعل مثل ذلك بالباء لنا مبادلات ن - ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها  
يكون الباء الاول وهكذا للاحرف ن كلها فتكون كل المبادلات ن (ن - ١)

اذا أخذت ثلاثة ثلاثة تكون المبادلات ن (ن - ١) X (ن - ٢) لانه اذا

ابقينا حرفاً ١ مثلاً بقي (ن - ١) حرف وقد تبين ان مبادلات ن حرف

اثنين اثنين هي ن (ن - ١) فتكون مبادلات ن (ن - ١) حرف اثنين اثنين (ن - ١)

X (ن - ٢) فاذا وضعت ١ اولاً في هذه المبادلات لنا (ن - ١) X (ن - ٢)

مبادلة للاحرف ن ثلاثة ثلاثة فيها يكون الف الاول واذا فعل مثل ذلك بالباء لنا

(ن - ١) X (ن - ٢) مبادلة للاحرف ن فيها - الاول وهكذا في كل الاحرف

ن فتكون كل المبادلات ن (ن - ١) X (ن - ٢)

وهكذا يبين ان المبادلات لاحرف ن مأخوذة اربعة اربعة تكون ن (ن - ١)

X (ن - ٢) X (ن - ٣)

اذا أخذت الاحرف اثنين اثنين يكون الضلع الاخير في العبارة النامة على عدة

المبادلات (ن - ١) واذا أخذت ثلاثة ثلاثة يكون الضلع الاخير (ن - ٢) واذا أخذت

اربعة اربعة يكون الضلع الاخير (ن - ٣) فاذا أخذت م وم معاً يكون الضلع الاخير

ن - (م - ١) او ن - م + ١ وعدة المبادلات لاحرف ن مأخوذة م وم معاً هي

ن (ن - ١) X (ن - ٢) X (ن - ٣) ..... (ن - م + ١)

### أمثلة

(١) ما المبادلات الممكنة للاحرف الثانية ا ب ج د هـ مأخوذة خمسة خمسة

ن = ٨ م = ٥ ن - م + ١ = ٤ فتصير العبارة

الجواب ٦٧٢٠

$$٥ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$$

(٢) ما المبادلات الممكنة لستة وعشرين حرفاً مأخوذة أربعة أربعة

الجواب ٢٥٨٨٠٠

(٣) ما المبادلات الممكنة لثاني عشر حرفاً مأخوذة ستة ستة

الجواب ٦٦٥٢٨٠

إذا دخل كل حرف في كل مبادلة أي إذا كان  $م = ن$  نصير العبارة

$$ن(ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times ١ \times ٢ \text{ أو قلب ترتيب الإضلاع}$$

$$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times \dots \times (ن-١) \times ن$$

(٤) كم قيمة تدق على ٨ اجراس

$$٤٠٢٢٠ = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

(٥) كم مبادلة ممكنة للأحرف الجيد

٤٧٩٠٠١٦٠٠

(٦) على كم ترتيب يمكن وضع ١٢ شخصاً

أما التراكيب فيراد بها المجموعات المختلفة التي يمكن أن توضع كيات عليها بدون التفتات إلى ترتيبها. مثالة الأحرف ا ب ت معاً لما مركب واحد فقط أي ا ب ت إذا أخذت اثنين اثنين لها ثلاثة تراكيب

ا ب ا ت ب ت

لأجل استعمال التراكيب الممكنة لأحرف ن مأخوذة م وم معاً إذا أخذت فرداً فرداً فهي ن

$$\frac{ن(ن-١) \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} \text{ ن إذا أخذت اثنين اثنين فهي}$$

$$\frac{ن(ن-١) \times (ن-٢) \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} \text{ ن إذا أخذت ثلاثة ثلاثة فهي}$$

فتكون العبارة العامة لأحرف ن مأخوذة م وم معاً

$$ن(ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (ن-م+١) \times م$$

$$١ \times ٢ \times ٣ \times \dots \times م$$

مثال أول كم تركيب ممكن لستة أحرف مأخوذة ثلاثة ثلاثة

$$ن = ٦ \quad م = ٣ \quad ن - م = ٣$$

$$\text{فتصير العبارة} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}$$

الجواب ٧٠

(٢) كم تركيب لثانية أحرف مأخوذة أربعة أربعة

الجواب ٢١٠

(٣) كم تركيب لعشرة أحرف مأخوذة ستة ستة معاً

## الفصل الثاني والعشرون

## في السرد غير المتناهي

٢٢٢ انه في تجذير كمية او في قسمة كمية على اخرى يحدث احيانا اننا لانستطيع الوصول الى الجذر او الى الخارج بالتام ولكن نقتد في العمل الى غير نهاية والحادث من ذلك يسمى سرداً غير منتهى

٢٢٢ الكسر يُبَسِّط أحياناً كثيرة الى سرده غير متناه بقسمة الصورة على المخرج .  
لان قيمة الكسر في الخارج من تلك القسمة . وان لم يوجد المخرج في الصورة مراراً معلومة  
يبقى بعد كل قسمة باقي فينبعث في العمل الى غير نهاية . مثاله لو قبل بسط  $\frac{1}{11}$  الى  
سرد غير متناه لتول

$$(1 + t + t^2 + t^3 + \dots)$$

۱-ت

+

ن-ن

۴-۲

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$\Sigma_+$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ت الح

وعلى هذا المتوال يكون السرد ١ + ت + ت + ت + ت + ت + ت + ت + الح  
ثم لكي يقترب السرد الى قيمة الكسر في كل جزء منه أكثر فأكثر يقتضي ان يكون الجزء  
الأول من المتسوم عليه أكبر من الثاني كما نرى من المثال السابق فان كان ت أكبر  
من واحد يبعد كل جزء من السرد أكثر فأكثر عن قيمة الكسر الحقيقية لانه بعد كل  
قسمه يبقى باقى يجب اضافته الى الخارج او طرحه منه وكل ما كان هذا الباقي اعظم  
ابتعد عن القيمة الحقيقية ولكن ان كان ت اصغر من واحد كما لو فرض ت =  $\frac{1}{2}$







الناسب الا الجزء الاصغر منسوماً على الناسب الا واحداً وفي سرده ما بطر يكون الجزء  
الاصغر صغيراً الى غير نهاية فيحسب لاشيء فتعبر العبارة  $m = \frac{b}{a-b}$  او  $m = \frac{b}{a-b}$

مثال ١ ما هو مجموع هذا السرد

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

الجزء الاعظم  $= \frac{1}{2}$  والناسب  $= 10$

$$m = \frac{b}{a-b} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

٢ ما هو مجموع هذا السرد  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

$$m = \frac{1 \times 2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

٣ ما هو مجموع هذا السرد  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

$$1 + 1 = 2$$

٢٢٨ ثم انه يستعمل مجموع بعض انواع السرد بواسطة الطرح لانه حسب قواعد

الكسور

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} & = & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} & = & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} & = & \frac{1}{256} \end{array}$$

فان جعلت الكسور الواقعة عن اليسار في سرده فالامر واضح انه يعدل فضلة  
السردين المركبين من الكسور عن اليمين . وتعلم تلك الفضلة بسهولة لانه ان طرح  
الجزء الاول من احد هذين السردين فالباقي يعدل السرد الآخر

فلنفرض سردها غير متناه  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  المطلوب  
مجموعه فلنصنع منه سردها جديداً بطرح الضلع الثاني من الخارج ولكن مجموع هذا السرد  
الجديد  $= m$

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$m - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} + \dots$$

مثال ٢ ما هو مجموع السرد  $\frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \frac{1}{2401} + \frac{1}{16807} + \dots$

نفرض  $m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  الخ

إذا  $m = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  الخ

بالطرح  $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}$  الخ

أو  $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}$  الخ

ما هو مجموع سردها اجزاء هذه

الخ  $\frac{1}{12 \times 1} + \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{12 \times 3} + \frac{1}{12 \times 4} + \frac{1}{12 \times 5} + \frac{1}{12 \times 6}$

+  $\frac{1}{12 \times 7} + \frac{1}{12 \times 8} + \frac{1}{12 \times 9} + \frac{1}{12 \times 10} + \frac{1}{12 \times 11} + \frac{1}{12 \times 12}$  الخ

الخ  $\frac{1}{12 \times 1} + \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{12 \times 3} + \frac{1}{12 \times 4} + \frac{1}{12 \times 5} + \frac{1}{12 \times 6}$

أو  $\frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{48} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72}$  الخ

ما هو مجموع هذا السرد

الخ  $\frac{1}{12 \times 1} + \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{12 \times 3} + \frac{1}{12 \times 4} + \frac{1}{12 \times 5} + \frac{1}{12 \times 6}$

الجواب  $\frac{1}{12}$

٢٢٦ طريقة اخرى لجميع اسراده جمعها ممكن

افرض سردها مابعداً فيدقوات كثيرة غير ثابتة القيمة مثل ك وليكن مجموعها  $m = 0$  ثم

اضرب جانبي المعادلة في كمية مركبة من ك وكمية اخرى ثابتة واجعل للكاف قيمة حتى

تكون قيمة الكمية المركبة المضروب فيها صفراً فان نقل جزء او اكثر الى الجانب الاول

يعدل الجانب الثاني . مثاله

(١) افرض  $m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  الخ

اضرب الجانبين في ك - ١ فيصير

$m \times (ك - ١) = ١ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  الخ

فان فُرض ك - ١ = ٠ يصير الجانب الاول اي  $m \times (ك - ١) = ٠$  ثم ينقل

١ الى الجانب الاول لنا  $١ = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  الخ

(٢) مفروض  $m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  الخ

اضرب الجانبين في ك - ١ فلنا

$m \times (ك - ١) = ١ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  الخ

ثم ان فُرض ك - ١ = ١ يكون ك = ٢ وينقل الجزء من الى الجانب الاول لنا



$$\frac{1}{7 \times 5} + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1$$

$$\text{المفروض م} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

اضرب الجانبيين في ٢ ك - ٢ ك + ١ فلنا

$$\frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{2} - 1 = (1 + 2 - 2) \times \text{م}$$

وان قُرض ك = ١ لنا

$$\frac{1}{1 \times 5 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

فقرى من المثالين الاخيرين ان سردين مختلفين قد يكونان على قيمة واحدة

### نبذة

في انعكس الاسرار

٢٤٠ لكي انعكس مراداً مثل هذا

ك = ت + ن + ب + ن + س + ن + د + ن + ر + ن  
اي لتجد قيمة ن في اجزاء من ك افرض سراداً له سميات غير معينة  
فلنفرض ن = ت + ك + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك + الخ  
ثم لتجد قيمة قوات ن بموجب هذا المفروض لنا

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الخ}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الخ}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الخ}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الخ}$$

ثم بالتعويض عن قوات ن في السرد الاول بهذه القيات لنا



$$\begin{aligned} \text{س} - \text{ب} - \text{ب} - \text{س} &= \text{د} - \text{ب} - \text{ب} - \text{س} + \text{ت} + \text{د} \\ \text{ر} - \text{ب} - \text{ب} - \text{س} + \text{ت} + \text{س} + \text{ت} + \text{ب} - \text{د} - \text{ت} + \text{ر} \end{aligned}$$

فهذه قيمات المسميات غير المعينة في السرد الذي فرضناه ما بقا اي

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الح}$$

ثم لنفرض سردا

$$\text{ك} = \text{ن} - \frac{1}{2} \text{ن} + \frac{1}{4} \text{ن} - \frac{1}{8} \text{ن} + \frac{1}{16} \text{ن} - \frac{1}{32} \text{ن} + \frac{1}{64} \text{ن} - \frac{1}{128} \text{ن} + \frac{1}{256} \text{ن} - \frac{1}{512} \text{ن} + \frac{1}{1024} \text{ن} - \frac{1}{2048} \text{ن} + \frac{1}{4096} \text{ن} - \frac{1}{8192} \text{ن} + \frac{1}{16384} \text{ن} - \frac{1}{32768} \text{ن} + \frac{1}{65536} \text{ن} - \frac{1}{131072} \text{ن} + \frac{1}{262144} \text{ن} - \frac{1}{524288} \text{ن} + \frac{1}{1048576} \text{ن} - \frac{1}{2097152} \text{ن} + \frac{1}{4194304} \text{ن} - \frac{1}{8388608} \text{ن} + \frac{1}{16777216} \text{ن} - \frac{1}{33554432} \text{ن} + \frac{1}{67108864} \text{ن} - \frac{1}{134217728} \text{ن} + \frac{1}{268435456} \text{ن} - \frac{1}{536870912} \text{ن} + \frac{1}{1073741824} \text{ن} - \frac{1}{2147483648} \text{ن} + \frac{1}{4294967296} \text{ن} - \frac{1}{8589934592} \text{ن} + \frac{1}{17179869184} \text{ن} - \frac{1}{34359738368} \text{ن} + \frac{1}{68719476736} \text{ن} - \frac{1}{137438953472} \text{ن} + \frac{1}{274877906944} \text{ن} - \frac{1}{549755813888} \text{ن} + \frac{1}{1099511627776} \text{ن} - \frac{1}{2199023255552} \text{ن} + \frac{1}{4398046511104} \text{ن} - \frac{1}{8796093022208} \text{ن} + \frac{1}{17592186044416} \text{ن} - \frac{1}{35184372088832} \text{ن} + \frac{1}{70368744177664} \text{ن} - \frac{1}{140737488355328} \text{ن} + \frac{1}{281474976710656} \text{ن} - \frac{1}{562949953421312} \text{ن} + \frac{1}{1125899906842624} \text{ن} - \frac{1}{2251799813685248} \text{ن} + \frac{1}{4503599627370496} \text{ن} - \frac{1}{9007199254740992} \text{ن} + \frac{1}{18014398509481984} \text{ن} - \frac{1}{36028797018963968} \text{ن} + \frac{1}{72057594037927936} \text{ن} - \frac{1}{144115188075855872} \text{ن} + \frac{1}{288230376151711744} \text{ن} - \frac{1}{576460752303423488} \text{ن} + \frac{1}{1152921504606846976} \text{ن} - \frac{1}{2305843009213693952} \text{ن} + \frac{1}{4611686018427387904} \text{ن} - \frac{1}{9223372036854775808} \text{ن} + \frac{1}{18446744073709551616} \text{ن} - \frac{1}{36893488147419103232} \text{ن} + \frac{1}{73786976294838206464} \text{ن} - \frac{1}{147573952589676412928} \text{ن} + \frac{1}{295147905179352825856} \text{ن} - \frac{1}{590295810358705651712} \text{ن} + \frac{1}{1180591620717411303424} \text{ن} - \frac{1}{2361183241434822606848} \text{ن} + \frac{1}{4722366482869645213696} \text{ن} - \frac{1}{9444732965739290427392} \text{ن} + \frac{1}{18889465931478580854784} \text{ن} - \frac{1}{37778931862957161709568} \text{ن} + \frac{1}{75557863725914323419136} \text{ن} - \frac{1}{151115727451828646838272} \text{ن} + \frac{1}{302231454903657293676544} \text{ن} - \frac{1}{604462909807314587353088} \text{ن} + \frac{1}{1208925819614629174706176} \text{ن} - \frac{1}{2417851639229258349412352} \text{ن} + \frac{1}{4835703278458516698824704} \text{ن} - \frac{1}{9671406556917033397649408} \text{ن} + \frac{1}{19342813113834066795298816} \text{ن} - \frac{1}{38685626227668133590597632} \text{ن} + \frac{1}{77371252455336267181195264} \text{ن} - \frac{1}{154742504910672534362390528} \text{ن} + \frac{1}{309485009821345068724781056} \text{ن} - \frac{1}{618970019642690137449562112} \text{ن} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} \text{ن} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} \text{ن} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} \text{ن} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} \text{ن} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} \text{ن} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} \text{ن} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} \text{ن} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} \text{ن} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} \text{ن} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} \text{ن} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \text{ن} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} \text{ن} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} \text{ن} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} \text{ن} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} \text{ن} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} \text{ن} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} \text{ن} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} \text{ن} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} \text{ن} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} \text{ن} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} \text{ن} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} \text{ن} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} \text{ن} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} \text{ن} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} \text{ن} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} \text{ن} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} \text{ن} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} \text{ن} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} \text{ن} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} \text{ن} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} \text{ن} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} \text{ن} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} \text{ن} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} \text{ن} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} \text{ن} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} \text{ن} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} \text{ن} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} \text{ن} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} \text{ن} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} \text{ن} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} \text{ن} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} \text{ن} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} \text{ن} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} \text{ن} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} \text{ن} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} \text{ن} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} \text{ن} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} \text{ن} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} \text{ن} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} \text{ن} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} \text{ن} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} \text{ن} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} \text{ن} - \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} \text{ن} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} \text{ن} - \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} \text{ن} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} \text{ن} - \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} \text{ن} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} \text{ن} - \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} \text{ن} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} \text{ن} - \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} \text{ن} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} \text{ن} - \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} \text{ن} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} \text{ن} - \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} \text{ن} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} \text{ن} - \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} \text{ن} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} \text{ن} - \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} \text{ن} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} \text{ن} - \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} \text{ن} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} \text{ن} - \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} \text{ن} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} \text{ن} - \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} \text{ن} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} \text{ن} - \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} \text{ن} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} \text{ن} - \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} \text{ن} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} \text{ن} - \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} \text{ن} + \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} \text{ن} - \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} \text{ن} + \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} \text{ن} - \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} \text{ن} + \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} \text{ن} - \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} \text{ن} + \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} \text{ن} - \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} \text{ن} + \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} \text{ن} - \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} \text{ن} + \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} \text{ن} - \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} \text{ن} + \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} \text{ن} - \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} \text{ن} + \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} \text{ن} - \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} \text{ن} + \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} \text{ن} - \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} \text{ن} + \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} \text{ن} - \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} \text{ن} + \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} \text{ن} - \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} \text{ن} + \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} \text{ن} - \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} \text{ن} + \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} \text{ن} - \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} \text{ن} + \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} \text{ن} - \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} \text{ن} + \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} \text{ن} - \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} \text{ن} + \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} \text{ن} - \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} \text{ن} + \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} \text{ن} - \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} \text{ن} + \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} \text{ن} - \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} \text{ن} + \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} \text{ن} - \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} \text{ن} + \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} \text{ن} - \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} \text{ن} + \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} \text{ن} - \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} \text{ن} + \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} \text{ن} - \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} \text{ن} + \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} \text{ن} - \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} \text{ن} + \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} \text{ن} - \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} \text{ن} + \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} \text{ن} - \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} \text{ن} + \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} \text{ن} - \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} \text{ن} + \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} \text{ن} - \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} \text{ن} + \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} \text{ن} - \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} \text{ن} + \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} \text{ن} - \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} \text{ن} + \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} \text{ن} - \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} \text{ن} + \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} \text{ن} - \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} \text{ن} + \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} \text{ن} - \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} \text{ن} + \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} \text{ن} - \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} \text{ن} + \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} \text{ن} - \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} \text{ن} + \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} \text{ن} - \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} \text{ن} + \frac{1}{706738825911353731833319000297167406330993558750247583248642480$$

ان كان قياس النسبة مركباً من ثلاثة اجزاء مثل الثاني المفروض سابقاً فلتكن

م + ن + ر

ثم د = م + ن + ك + ب + ن ك + ت ر ك = الجزء الرابع

ي = د م + ك + م ن + ك + ب ر ك = الخامس

ف = ي م + ك + د ن + ك + م ر ك = السادس الخ

٢٤٢ في كل سرور داي يستعمل قياس النسبة بقول معادلتين من هذه المعادلات

ان كان مركباً من جزئين بقول ثلاث منها ان كان مركباً من ثلاثة اجزاء

فلنفرض ك = ١ ولناخذ الجزء الرابع والخامس ما سبق ذكرها وإذا فرضنا ك

= ١ فلنا

$$\left\{ \begin{array}{l} د = م + ن + ك \\ ي = د م + م ن + ن ك \end{array} \right. \text{مطلوب قيمة م ون}$$

بقول هاتين المعادلتين لنا

$$م = \frac{د - م - ن - ك}{د - م - ن - ك} = \frac{د - م - ن - ك}{د - م - ن - ك}$$

ثم في هذا السرد ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ الخ

ان جعل ك = ١ فلنا

$$م = \frac{١ \times ٢ + ٥ \times ٧}{٧ \times ٢ - ١٥} = ٢ \quad ن = \frac{٧ - ١ \times ٥}{٧ \times ٢ - ١٥} = ١$$

فيكون قياس النسبة ٢ - ١

٢٤٣ متى عرفنا قياس النسبة لسرد ما بطر نستعلم من ذلك مجموع السرد

$$\left\{ \begin{array}{l} ت + ب + ك + م + ن + ك + د ك + ي ك + ف ك الخ سردياً دائراً \\ \text{قياس النسبة له م + ن} \end{array} \right.$$

فيكون ت = الجزء الاول ب = الثاني

م = ب م + ك + ت م + ن ك = الثالث

د = م م + ك + م ن + ك = الرابع

ي = د م + ك + م ن + ك = الخامس الخ

فدري هنا م ك مضروباً في كل جزء الأول والاخير ون ك في كل جزء  
الأخيرين وان وم امتداد السرد الى غير نهاية يجوز ترك الاخيرين كأن لا قيمة لما  
كما علمت وان فرض ع = مجموع السرد فلنا

$$ع = ت + ب + م ك \times (ب + س + د الخ) + ن ك \times (ت + ب + س الخ)$$

$$وع - ت = ب + س + د الخ \quad وع = ت + ب + س الخ$$

$$فاذا ع = ت + ب + م ك \times (ع - ت) + ن ك \times ع$$

$$\text{وتحويل هذه المعادلة نصير } ع = \frac{ت + ب + س + د الخ}{١ - م ك} = \frac{١ - م ك}{١ - م ك} ع$$

$$\text{مثال ١ ما هو مجموع } ١ + ٦ + ١٢ + ١٨ + ٢٤ + ٣٠ + ٣٦ + ٤٢$$

$$\text{قياس النمة } = ٦ + ١$$

$$\text{اذا } ت = ١ \quad ب = ٦ \quad م = ١ \quad ن = ٦$$

$$\text{والجنع } = \frac{١ - ١}{١ - ٦} = \frac{١}{٦}$$

$$٢ \quad \text{ما هو مجموع } ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١}{١ - ٢} = ١$$

$$٣ \quad \text{ما هو مجموع } ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ + ٥١٢ + ١٠٢٤$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١}{١ - ٢} = ١$$

$$٤ \quad \text{ما هو مجموع } ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ + ٥١٢ + ١٠٢٤$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١}{١ - ٢} = ١$$

$$٥ \quad \text{ما هو مجموع } ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ + ٥١٢ + ١٠٢٤$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١}{١ - ٢} = ١$$

$$٦ \quad \text{ما هو مجموع } ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ + ٥١٢ + ١٠٢٤$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١}{١ - ٢} = ١$$

في ترتيب الفضلات

٢٤٤ لكي نستعلم قيمة بعض اجزاء سردي الى حد ما يلزم التدقيق المقصود به

عمل ما يؤخذ عدة رتب من فضلات اجزاء السرد . مثلاً ان فرض سرد

$$١ \quad ٨ \quad ٢٧ \quad ٦٤ \quad ١٢٥$$

$$\text{الرتبة الاولى من الفضلات} \quad ٦١ \quad ٢٧ \quad ١٩$$

$$\text{الرتبة الثانية} \quad ٢٤ \quad ١٨ \quad ١٢$$

$$\text{الثالثة ولم جرا} \quad ٦ \quad ٦$$





السرد ١ ٢ ٥ ٢ ١  
 الرتبة الأولى من فضلات = ٢ ٢ ٢ ٢  
 الثانية = . . .

هنا ت = ١ د = ٢ د = ٠

المجموع = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ = ٢ ×  $\frac{1-2^0}{1-2}$  أي ع

(١) ما هو مجموع ٢٠ جزءاً من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الخ

ت = ٠ د = ٢ د = ٢ د = ٠ . ومجموع عشرين جزءاً = ٢٨٧٠

(٢) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١ ٢ + ١

٢ + ١ ٢ + ٢ + ١ ٤ + ٢ + ٢ + ١ الخ

السرد ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ ٢١

الرتبة الأولى للفضلات ٢ ٢ ٤ ٥ ٦

الثانية ١ ١ ١ ١ ١

الثالثة . . .

ت = ١ د = ٢ د = ١ د = ٠ الخ

نحسب العبارة العامة السابقة

$$م = ع = \frac{٢ \times \frac{(1-2^n)}{1-2} + ٢ \times \frac{(1-2^n)}{1-2}}{٢ \times ٢ \times ١} = \frac{(٢-٢^n)(1-2^n)}{٢ \times ٢ \times ١} + ٢ \times \frac{(1-2^n)}{٢ \times ٢ \times ١} = \frac{(٢+٢^n)(1+2^n)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

(١) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الخ

ت = ١ د = ٢ د = ٢ د = ٠ د = ٠ الخ

وبالتعويض في العبارة المشار إليها السابقة لنا

$$م = \frac{(1+2^n)(1+2^n)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

(٥) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد

١ × (١ + م) ٢ × (٢ + م) ٣ × (٣ + م) ٤ × (٤ + م) الخ

ت = م = ١ د = م = ٢ د = ٢ د = ٠ الخ

$$م = م = \frac{٢ \times \frac{(1-2^n)(1-2^n)}{٢ \times ٢ \times ١} + (٣ + م) \times \frac{(1-2^n)}{٢ \times ١} + (١ + م) \times \frac{(1-2^n)}{(٢ \times ٢ + ٢ + ١) \times (١ + ٢)}}{٢ \times ٢ \times ١}$$

نتبه . هذا الباب كثير الاستعمال في علم الهيئة والطبيعات فلا يسع المتعلم جهله



(٦) ما هو مجموع ٥٠ جزءاً من ١ ٢ ٣ ٤ الخ  
 ت = ١ = د = ٧ = د = ١٢ = د = ٦ = د = ٠

المجموع ١٦٣٥٦٣٥

(٧) ما هو مجموع ١٥ جزءاً من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ الخ  
 (٨) ما هو مجموع ٢٠ جزءاً من ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ الخ  
 (٩) ما هو مجموع ١٢ جزءاً من ١ ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ الخ

## في تكويم الكرات او الكلال

ان العبارات في المثال الثالث والرابع والخامس من الامثلة المتقدمة تستخدم لمعرفة عدد الكلال او الكرات في كُومٍ على هياكل مختلفة

### اولاً الكومة المثلثة الاضلاع



الكومة المثلثة الاضلاع مؤلفة من كلال موضوعة بعضها فوق بعض صفوفاً واعرافاً بحيث ينقص عدد الكلال واحداً في كل ضلع حتى ينتهي الى واحدة في العرق الاثني فعدد الكلال في كومة مثلية الاضلاع كاملة هو مجموع سرد ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ = ٧٨

وعلى افتراض ن عدد الكلال في ضلع واحد من افئدة او

$$(١) \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} = ٢$$

ثانياً الكومة المربعة



الكومة المربعة مؤلفة كما في الشكل اي في العرق الاعلى كلة واحدة وفي الثانية ٢ وفي الثالثة ٣ ولم جراً فاذا كانت الصفوف والاعراف ن يكون ددد الكلال مجموع السرد ١ ٢ ٣ ٤ الخ N كما ترى في العبارة في المثال الرابع السابق اي

$$(٢) \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} = ٢$$



- (٤) في كومة مستطيلة ناقصة طول القاعدة ٤٦ وعرضها ٢٠ والطول في الصنف الاعلى ٢٥ والعرض ٩ فكم كلة فيها  
الجواب ٧١٢٠
- (٥) في كومة مثثة ناقصة عدد الكل في كل ضلع من العرق الاسفل ٢٠ وفي كل ضلع من الاعلى ١٠ فكم كلة فيها
- (٦) في كومة مربعة ناقصة عدد الكل في ضلع من القاعدة ١٥ وفي ضلع من العرق الاعلى ٦ فكم كلة فيها
- (٧) في كومة مستطيلة عدد الكل في ضلع من القاعدة ٩٢ وفي الضلع الآخر ٤٠ وفي العرق الاعلى عدد الكل في ضلع ٧٠ وفي الضلع الآخر ١٨ فكم كلة فيها

## الفصل الثالث والعشرون

في المعادلات النامة من الدرجة الثالثة

٢٤٧ متى وُجد في معادلة مكعب المجهول ومربعة سُميت معادلة نامة من الدرجة الثالثة وهذه عبارة عمومية لمعادلات من هذا النوع بعد نقل الاجزاء الى جانب واحد

$$٠ = د + س ك + ب ك^٢ + ك ك^٣$$

ولا بد لكل معادلة من هذا النوع من ثلاثة اجوبة كما ان المعادلات من الدرجة الثانية لها جوابان

$$\text{فلو فرضنا } (ك-١) \times (ك-٢) \times (ك-٣) = ٠ \text{ لكان لنا من ذلك } ك^٣ - ٦ك^٢ + ١١ك - ٦ = ٠$$

ولكني تعدل هذه الكميات صفراً لا بد ان يكون احد الاضلاع التي حصلت المعادلة منها صفراً اي تكون ك-١ = ٠ وك-٢ = ٠ او ك-٣ = ٠ وك-٢ = ٠ ان ك-٣ = ٠ وك-٢ = ٠ واذا عوضنا عن المجهول بكية اخرى اية كانت غير واحدة من هذه الثلاث لم يكن المحاصل صفراً فلا يكون للمعادلة غير هذه الاجوبة الثلاثة واجوبة المعادلات هذه نسمي اصولها

٢٤٨ لاجل ابضاج كيفية استعمال اصول معادلة من هذا النوع لنفرض  
ك-ف-ك-ق-ك-ر

وبضرب الاولى في الثانية لنا ك- (ف+ق) ك+ف ق وان ضربت  
هذه في ك-ر قلنا

ك- (ف+ق+ر) ك+ (ف+ق+ف+ر) ك-ف ق ر وهذه  
العبارة تعدل صفراً متى كانت ك-ف- = ٠ وك-ف او ك-ق = ٠

وك-ق او ك-ر = ٠ وك-ر فلنعوض عن هذه المعادلة باخرى مثل ك-  
ت ك+ب ك-س = ٠ فلكي تكون الاصول الثلاثة على ما تقدم اي ك-ف

او ك-ق او ك-ر يلزم ان يكون

$$(١) ت = ف + ق + ر$$

$$(٢) ب = ف ي + ر + ق ر$$

$$(٣) س = ف ق ر$$

فنرى ان الجزء الثاني من المعادلة مشتمل على مجموع اصولها الثلاثة وان الجزء  
الثالث منها مشتمل على مجموع حاصل كل اثنين اثبت من الاصول الثلاثة . والجزء

الرابع مشتمل على حاصل الاصول الثلاثة . ونرى ايضا ان كل معادلة من الدرجة  
الثالثة لا يكون لها اصول منطقية الا الكميات التي تنفي الجزء الرابع منها . فمن حيث ان

ذلك الجزء هو حاصل الاصول الثلاثة لا بد ان يقبل الانقسام على كل واحد منها .  
ومن ذلك نستدل بسهولة على الكميات التي يجب ان نسميها في تنقيصنا عن اصول

المعادلة . فلو فرض ك- = ك+٦ لكان لنا بالمقابلة ك- = ٦-٠ . ومن حيث  
ان هذه المعادلة ليس لها اصول منطقية الا التي تنقسم ٦ عليها نعلم ان تلك الاصول هي

ثلاثة من هذه الاربعة اي ١ ٢ ٣ ٦ لان ٦ لا تنقسم الا على هذه الاربعة

$$\text{فان فرض ك-} = ١ \text{ لنا } ١-١-١-٦ = ٦$$

$$\text{وان فرض ك-} = ٢ \text{ لنا } ٢-٢-٨-٠ = ٠$$

$$\text{وان فرض ك-} = ٣ \text{ لنا } ٣-٣-٢٧-١٨ = ١٨$$

$$\text{وان فرض ك-} = ٦ \text{ لنا } ٦-٦-٢١٦-٣٠٤ = ٣٠٤$$

فلنا من ذلك ك- = ٢ واحد من الاصول الثلاثة

فيكون ك- = ٢ ضلعاً من الاضلاع التي حصلت المعادلة من ضرب بعضها في  
بعض . ونستعمل الآخر بالقسمة هكذا



٢٥١ متى كانت العلامات في المعادلة ايجابية وسلبية بالتناوب كما في المعادلات المذكورة آنفاً وفي هذه ك' - ت ك' + ب ك - س = ٠ تكون جميع الاصول ايجابية. ولو كانت جميع العلامات ايجابية كما في هذه ك' + ت ك' + ب ك + س = ٠ لكانت جميع الاصول سلبية كما يتضح من ضربها. مثالة ك = ٢ ك = ٣ ك = ٤ بالمقابلة ك - ٢ = ٠ ك - ٣ = ٠ ك - ٤ = ٠.

وبالضرب (ك - ٢) × (ك - ٣) × (ك - ٤) = ك' - ٩ ك' + ٢٦ ك - ٢٤ = ٠.

ولو فرض ك = ٢ = ك = ٣ = ك = ٤ = ٠

لكان ك = ٢ = ٠ ك = ٣ = ٠ ك = ٤ = ٠

فبالضرب لنا ك' + ٩ ك' + ٢٦ ك + ٢٤ = ٠

فندري ان عدد الاصول السلبية يماثل مرار تغيير العلامات في المعادلة. وعدد الاصول الايجابية يماثل مرار تناوب العلامات المتشابهة وفي هذه المعادلة ك' + ك' - ٣٤ ك + ٥٦ = ٠

نرى العلامات تتغير من + الى - ثم من - الى + اربع مراتين و+ يتبع + مرة واحدة فقط. ونستدل بذلك ان المعادلة اصلين ايجابيين واصلًا واحدًا سلبياً. ولا بد ان ٥٦ يقبل الانقسام على هذه الاصول و٥٦ ينقسم على ١ ٢ ٣ ٤ ٧ ٨ ١٤ ٢٨ ٥٦ فاذا فرضنا ك = ٢ فلنا ٢٨ - ٤ + ٨ - ٤ + ٥٦ = ٠ فاذا ك = ٢ هو اصل واحد. ولكي نستعلم الاخرين نقسم على

$$\begin{array}{r} \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \\ \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \\ \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \\ \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \\ \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \\ \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \quad \text{ك} - ٢ \end{array}$$

والخارج ك' + ٢ ك - ٢٨ = ٠ وك' + ٢ ك = ٢٨ ك = ٤ وك = ٧ (مسئلة ١) ما عدنان فضلتهما ١٢ واذا ضرب حاصلها في مجموعها كان الحاصل ١٤٥٦٠

لفرض ك = اصغرهما. وك = ١٢ = اكبرها. وحاصلها ك' + ١٢ ك ومجموعها ك' + ١٢ ومنا في حاصلها يعطينا ك' + ٢٦ ك + ١٤٤ ك = ١٤٥٦٠ وبالقسمة على ٢ ك' + ١٨ ك + ٧٢ ك = ٧٢٨٠ ولو اردنا ان نخرج جميع الاعلاد التي قبل

٧٢٨٠ الانقسام عليها لطال بنا العمل ولكن نرى ان ينقسم على ٨ فلنفرس ك - ٢  
ثم بالتعويض لنا ٨ ي + ٧٢ ي + ١٤٤ ي = ٧٢٨٠ وبالقسمة على ٨ لنا ي + ٩١  
ي + ١٨ ي = ٩١٠ و ٩١٠ يقبل الانقسام على ١٠ و ١٠ و ١٠ و ١٠ الى آخره  
فلاداعي لامتحان ١٠ و ١٠ لاننا نراهما من اول وهلة صغيرة فلنقسم اولاً ٧ اي  
نفرس ي = ٧ فلنا ٢٤٣ + ٤٤١ + ١٢٦ = ٩١٠ فاذا ي = ٧ فاذا ك + ١٤  
هو واحد من اصول المعادلة ونستعمل الآخرين بالقسمة هكذا

$$ي - ٧ = ٧٢ ي + ١٤٤ ي + ١٨ ي - ٩١٠ \quad (ي + ١٦ ي + ١٣٠)$$

$$\begin{array}{r} ١٦ ي + ١٨ ي \\ \hline ١١٢ ي - ٢ ي \\ \hline ١٣٠ ي - ١١٠ ي \\ \hline ٢٠ ي \end{array}$$

فلنا ي + ١٦ ي = ١٢٠ ي - ٨ ي + ٦٦ ي وهي كمية وهمية. وذلك  
بدل على ان الاصلين الآخرين هيان فاذا ك = ١٤ و ١٢ + ١٤ = ٢٦  
(مسئلة ٢) ما عددان فضلتهما ١٨ ومجموعهما في فضلة مكبيها = ٢٧٠١٨٤  
لنفرس اكبرها = ك فيكون اصغرهما ك + ١٨ وكعب الاكبر ك + وكعب  
الاصغر ك + ٥٤ ك + ٩٧٢ ك + ٨٢٢ وفضلة كميها ٥٤ ك + ٩٧٢ ك +  
٨٢٢ اي ٥٤ ك + ٩٧٢ ك + ٨٢٢ (ك + ١٨ + ١٠٨) وهذا في ٢ ك + ١٨ اي ٢ (ك + ٩)  
يعطينا

$$١٠٨ (ك + ٩٧٢ ك + ٢٧٠ + ٩٧٢) = ٢٧٠١٨٤ \quad \text{وبالقسمة على } ١٠٨$$

نصير

$$ك + ٩٧٢ ك + ٢٧٠ + ٩٧٢ = ٢٥٤٨$$

$$اي ك + ٩٧٢ ك + ٢٧٠ = ١٥٧٦$$

و ١٥٧٦ يقبل الانقسام على ١٠ و ٤ و ٨ الى آخره ونرى من اول وهلة ان  
١٠ و ٢٠ اصغرماً يلزم واذا امتحنا المعادلة باربعة نجد ما صحيحة. فاذا ك = ٤ هي  
واحد من اصول المعادلة. وبالقسمة على ك - ٤ لنا ك + ٢١ ك + ٣٩٤ = ٠  
ونحولها لنا ك = ٢١ + ١٥٧٦ - ٩٧٢ ك - ٤ وفي كميات وهمية. فيكون العددان  
المطلوبان ٤ و ١٨ = ٢٢

(مسئلة ٢) ما عددان فضلتهما ٧٢٠ واذا ضرب اصغرهما في جنرا اكبرها يكون

الحاصل ٢٠٧٣٦ لنفرض الأصغر كـ والأكبر كـ ٧٢٠+ كـ ٧٢٠+ كـ =

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٢٠٧٣٦$$

بتربيع الجانبيين كـ ٧٢٠+ كـ = ٨١ × ٤ × ٨ × ٨

ثم لنفرض كـ = ٨ ي فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٨١ \times ٨ \times ٧٢٠ + ٨١ \times ٨$$

بالقسمة على ٨ لنا ٨١ = ٩٠ + ٨١

ثم لنفرض ي = ٨ ل فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ = ٩٠ \times ٨ + ٨١$$

بالقسمة على ٨ لنا ٨١ = ٤٥ + ٨١

ثم لنفرض ل = ٩ م فلنا بتعويض

$$٩ \times ٤ = ٩ \times ٤٥ + ٩$$

بالقسمة على ٩ لنا ٩ = ٥ + ٩

أي ٩ × ٤ = (٥ + ٩) × ٩

إذاً ٩ = ٥ + ٩ وم ٩ = ٥ + ٩

فلنا ل = ٤٥ = ٩٠ + ٧٢٠ = ٥٧٦ = الأصغر

و ٧٢٠ + ٥٧٦ = ١٢٩٦ = الأكبر

ولنا طريقة أخرى لحل هذه المسألة

لنفرض أكبرها كـ فالأصغر كـ - ٧٢٠

بالضرب في كـ لنا كـ - ٧٢٠ = ٢٠٧٣٦

أي كـ - ٧٢٠ = ١٢ × ٢٧ × ٦٤

لنفرض كـ = ٤٤ فلنا ٦٤ = ٤٤ - ٧٢٠ = ١٢ × ٢٧ × ٦٤

بالقسمة على ٦٤ لنا ٤٤ = ٤٥ - ١٢ × ٢٧

لنفرض ي = ٢ ل فلنا ٢٧ = ١٢٥ - ل

بالقسمة على ٢٧ لنا ل = ١٢

وهنا نرى من أول نظرة أن ل = ٢ ومن ثم لنا

ي = ٢ = ك - ٢٦ = ١٢٩٦ = أكبرها

(مسألة ٤) ما عددان فضلتهما ١٢ وإذا ضربت هذه الفضلة في مجموع كمبيها كان

الحاصل ١٠٢١٤٤



لنفرض ك = اصفرها وك + ١٢ = اكبرها

كسب الاول = ك وكسب الثاني = ك + ٢٦ + ك + ٤٢٢ + ك ١٧٢٨ فلنا

$$١٢ (٢ + ك + ٢٦ + ك + ٤٢٢ + ك + ١٧٢٨) = ١٠٢١٤٤$$

بالقسمة على ١٢ و ٢ لنا ك + ١٨ + ك + ٢١٦ + ك + ٨٦٤ - ٤٢٥٦

$$اي ك + ١٨ + ك + ٢١٦ + ك = ٢٢٩٢ = ٥٣٨٨ \times ٨$$

لنفرض ك = ٢ ي ونقسم على ٨ فلنا

$$٢٢٩ = ٥٣٨٨ = ٢٤٤ + ٢ ي$$

و ٢٢٩ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٨ و ٥٣ الى آخره

فنفرض ي = ٤ فلنا ٢٢٩ = ٢١٦ + ١٤٤ + ٦٤

$$فاذا ي = ٤ ك = ٨ + ١٢ = ٢٠$$

(مسئلة ٥) رجال عقدوا شركة على شرط ان يضع كل واحد منهم في راس المال

من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات فربحوا في السنة ٦ اكثر من عدد الشركاء

وكان كل الربح ٢٩٢ ديناراً فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = عدد الشركاء ثم ١٠ ك = ما وضعه كل واحد و ١٠ ك = ما

وضعه جميعهم والربح في السنة ك + ٦ فيكون ربح دينار واحد  $\frac{٦ + ك}{١٠}$  ولما في ١٠ ك =

$$\frac{٦ + ك}{١٠} = \text{الربح كله}$$

$$\text{فلنا } \frac{٦ + ك}{١٠} = ٢٩٢$$

$$\text{و } ٦ + ك = ٢٩٢٠$$

لنفرض ك = ٢ ي ثم نقسم على ٨ فلنا

$$٢٩٠ = ٢ ي$$

و ٢٩٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٥ و ٧ و ١٠ الى آخره

فدري من اول وهلة ان ١٠ هي اكثر ما يلزم و ٢ و ٥ اصغر ما يلزم . فلنفرض

$$ي = ٧ فلنا$$

$$١٤٧ + ٢٩٢ = ٢٩٠ فاذا ي = ٧ ك = ١٤$$

الشركاء ١٤ وكل واحد وضع في راس المال ١٤٠ ديناراً

(مسئلة ٦) شركة في تجارة كان راس مالهم ٨٢٤٠ ديناراً فاضاف اليه كل

شريك من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء ٤٠ مرة فربحوا في السنة من الدنانير ما يماثل

عدد الشركاء وعند قسمة الربح اخذ كل واحد من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء

عشر مرات وبقي ٢٢٤ ديناراً فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = الشركاء و ٤٠ ك = ما اضافة كل واحد من رأس المال و ٤٠ ك<sup>٢</sup> ما اضافة الجميع و ٤٠ ك<sup>٢</sup> + ٨٢٤٠ = رأس المال كله بعد الاضافات المذكورة ويرجع في المئة ك فيكون كل الربح  $\frac{٤٠ ك}{١٠٠} + \frac{٨٢٤٠ ك}{١٠٠}$  اي  $\frac{٢}{١٠٠} ك + \frac{٨٢٤٠}{١٠٠} ك$  ومن هذا المبلغ اخذ كل واحد ١٠ ك والكل اخذوا ١٠ ك<sup>٢</sup> وبقي ٢٢٤ فلما  $\frac{٢}{١٠٠} ك + \frac{٨٢٤٠}{١٠٠} ك = ١٠ ك$

$$٢٢٤ + ٢٥ - ٢٠ ك = ٥٦٠$$

فدى العلامات تتغير ثلاث مرّات فتكون الاصول جميعها ايجابية و ٥٦٠ قبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٥ و ٧ و ٨ الخ فان فرضنا ك = ٤ نجد ان المعادلة لا تنجح وكذلك اذا فرضنا ك = ٥ واذا فرضنا ك = ٧ نجد المعادلة صحيحة فاذا ك = ٧ ونجد الاصلين الآخرين بالقسمة فلما بعد القسمة ك<sup>٢</sup> - ١٨ ك + ٨٠ = ٠ ك = ٩ + ١ اي ك = ٨ او ١٠ وكل واحد من هذه الاجوبة الثلاثة يطابق شروط المسئلة هكذا

عدد الشركاء	٧	٨	١٠
كل واحد اضاف ٤٠ ك	٢٨٠	٢٢٠	٤٠٠
الكل اضافوا ٤٠ ك <sup>٢</sup>	١٩٦٠	٢٥٦٠	٤٠٠٠
رأس المال	٨٢٤٠	٨٢٤٠	٨٢٤٠
٤٠ ك <sup>٢</sup> + ٨٢٤٠ =	١٠٣٠٠	١٠٨٠٠	١٢٢٤٠
رجعوا في المئة ما ياتل عدد الشركاء	٧١٤	٨٦٤	١٢٢٤
كل واحد اخذ	٧٠	٨٠	١٠٠
الكل اخذوا	٤٩٠	٦٤٠	١٠٠٠
بقي	٢٢٤	٢٢٤	٢٢٤

(مسئلة ٧) ما عددان مجتمعها ١٢ وان ضرب كل واحد في جذر الآخر كان مجتمع الماحاصلين ٢٠

لنفرض احدهما ك<sup>٢</sup> والآخرى

(١) بشروط المسئلة ك<sup>٢</sup> + ي<sup>٢</sup> = ١٢

(٦) اضعف ٢ كى الى الجانين ك' + ٢ كى + ١٢ = ٢ كى

(٧) بالتعذير ك + ١٢ = ٢ كى

(٨) بالشرط الثاني ك' + ١٢ = ٢ كى

اي كى (ك + ١٢) = ٢٠

(٩) بالقسمة ك + ١٢ = ٢٠

(١٠) بالمساواة بين (٢) و (٩)  $\frac{٢٠}{٢} = \frac{٢٠}{٢}$

(١١) بالترقية  $\frac{٢٠}{٢} = \frac{٢٠}{٢}$

(١٢) بالجبر ٢ كى + ١٢ = ٢ كى

(١٣) افرض كى = ف ٢ ف + ١٢ = ٢٠

اي ف + ٦ = ٢٠

او اذا فرض ك + ١٢ = ٢ كى

فلنا من (٤) كى (ك + ١٢) = ف

و ك' + ٢ كى + ١٢ = ف

اي ك' + ٢ ف + ١٢ = ف

و ك' + ١٢ = ف - ٢ ف

ومن (١) لنا ف - ٢ ف = ١٢

بالمقابلة ف = ١٢

لنا من (٤) ف = ٢٠

بالقسمة ف = ٢٠

وبالمساواة ف = ١٢

بالجبر ف = ١٢

افرض ف = ١٢

و ف = ٢٠

ك = ٦ ك' = ٦

٢ = ١ ك' = ٤

## الفصل الرابع والعشرون

في حل المعادلات من كل درجة بالاستقراء

٢٥٢ قد تقدم القول ان حاصل اصول معادلة يعدل جزءها الاخير . فن النظر الى هذا الجزء يمكننا ان نفرض احد الاصول فرضاً تقريبياً . واذا فرضنا للاصل قيمتين واختارناهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة نستعلم الخطأ . ثم نصلح المفروضين على موجب هذه النسبة

نسبة فضلة الخطأين الى فضلة المفروضين كالخطأ الاصغر الى الاصلاح المقتضى له

ونكرر هذا العمل حتى ننتهي الى المطلوب ونسبى هذه الطريقة استقراء . وبمثل العمل اذا فرضنا عددين فضلهما  $ا$  او  $ا٠٠$  الى آخره .

$$(١) \text{ مفروض ك} - ٨ \text{ ك} + ١٧ \text{ ك} - ١٠ = ٠ \text{ مطلوب قيمة ك}$$

نرى في هذه المعادلة ان العلامات تغيرت ثلاث مرات فيقتضى ان تكون الاصول الثلاثة ايجابية وان يكون حاصلها  $١٠$  ومجموعها  $٨$  فلنفرض احدهما  $ا٠٥$  او  $ا٢٥$  .

بالاخر	بالتالي
ك = ١٢٢٦٥١	١٤٠٦٠٨
٨ - ك = ٢٠٨٠٨	- ٢١٦٢٢
١٧ ك = ٨٦٧	٨٨٤
١٠ - = ١٠٠	- ١٠٠
الخطأ = ١٢٧١ +	٢٦٨٨ +
بالطرح	١٢٧١
فضلة الخطأين	١٤١٧ +

ثم بالنسبة  $١٤ : ١ :: ١٢٧ : ١٠٠٩$  اي  $١٠٠٩$  . يجب طرحها من المفروض الاول فلنا  $ا٥ - ١٠٠٩ = ٥٠١$

ثم لنفرض ك = ٠.١ أو ٠.٢

بالأول	بالتاني
ك = ١٢٥٧٥١	١٢٦٥٠٦
٨ - ك = ٢٠٠٨	٢٠١٦ -
١٧ ك = ٨٥١٧	٨٥٢٤
١٠ - = ١٠ -	١٠ -
الخطآن + ٠.١٢١	٢٤٦ +

وبالطرح ٠.٢٤٦ - ٠.١٢١ = ٠.١٢٥

ثم ٠.١٢٥ : ٠.١ : ٠.١٢١ :: ٠.١ : ك = الاصلاح

و ٠.١ - ٠.١ = ٠ وفي تطابق المعادلة فلنا ك = ٠ واحد من الاصول

الثلاثة. وبالقسمه

ك - ٠ = (ك - ٨ + ١٧ ك - ١٠) ك - ٢ + ٢ = ٠

وباتمام التوزيع الى آخره ك = ٢ او ١ وهذه الاصول الثلاثة اي ٠ و ٢ و ١

بعد تبديل علاماتها يكون مجتمعا ٨ وحاصلها ١٠ -

(٢) ما في اصول هذه المعادلة ك - ٨ + ٤ ك + ٤٨ = ٠

الجواب ٢ + ٤ + ٦

(٣) ما في اصول هذه المعادلة ك - ١٦ ك + ٦٥ ك - ٥٠ = ٠

الجواب ١ ٥ ١٠

(٤) ما في اصول هذه المعادلة ك + ٢ ك - ٢٣ ك - ١٠ = ٠

الجواب ٦ - ٥ - ٢

(٥) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبا وفي ك + ١ ك + ٤ ك

٨٠ =

(٦) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبا وفي ك + ك + ك = ١٠٠

٢٥٣ طريقة اخرى

لنفرض ر = عددا قد وجدنا بالامتحان انه يعدل قيمة المجهول ك تقريبا

ولنفرض ل = الفرق بين ر والاصل الحقيقي ك ثم في المعادلة المفروضة نعوض

عن ك بواسطة  $ر + ل$  ونسقط الاجزاء المحنوية قوات من ل فتصير المعادلة بسيطة . مثالة

$$(١) \text{ مفروض ك}^٢ - ١٦ ك^٢ + ٦٥ = ٥٠$$

$$\text{لنفرض ك} = ر - ل$$

$$\text{فلنا ك}^٢ = ر^٢ - ٢رل + ل^٢$$

$$١٦ ك^٢ = ١٦ ر^٢ - ٣٢رل + ١٦ ل^٢$$

$$٦٥ ك = ٦٥ ر - ٦٥ ل$$

باسقاط الاجزاء التي فيها ل ولنا

$$١٦ ر^٢ - ٦٥ ر + ١٦ ل^٢ - ٣٢رل + ٦٥ ل = ٥٠$$

$$\text{و ل} = \frac{٦٥ - ٣٢ + ١٦}{٦٥ - ٣٢ + ١٦} = ٠$$

ثم لنفرض  $ر = ١١$  فإذا  $ل = \frac{٦٥}{١١} = ٠.٨$  تقريباً

$$\text{ك} = ر - ل = ١١ - ٠.٨ = ١٠.٢$$

ثم افرض  $ر = ١٠.٢$  في المعادلة الاخيرة فلنا  $ل = ٠.١٨٨$  و  $ر - ل =$

$$١٠.٠١٢$$

$$\text{افرض ر} = ١٠.٠١٢ \text{ فلنا ل} = ٠.٠١٢$$

$$\text{و ر} - ل = ١٠.٠١٢ - ٠.٠١٢ = ١٠ = \text{ك}$$

(٢) مطلوب اصل هذه المعادلة تقريباً وهي  $١٠ ك^٢ + ٥ ك = ٣٦٠٠$

الجواب  $١١.٠٠٦٧$

$$(٣) \text{ ما في اصول هذه المعادلة ك}^٢ + ٢ ك^٢ - ١١ ك = ١٢$$

$$(٤) \text{ ما في اصول هذه المعادلة ك}^٢ + ٤ ك^٢ - ٧ ك = ٣٤$$

—•••—

## الفصل الخامس والعشرون

في المسائل غير المحدودة وهي السئلة

٢٥٤ ان كانت المعادلات التي تتركب من شروط مشتمل اقل عدداً من مجاميلها تكون المسئلة غير محدودة . ويمكن ان يفرض لاحد المجاميل اية قيمة كانت

فتخرج البقية بالنسبة الى المفروض . وفي مسائل هذا الباب تستعمل القواعد السابقة ولكن ينبغي البصر والاحتياط لكي توجد الطريقة الفضلى لاستعمالها في كل مسألة بمفردها .  
فلو طلب عددان صحيحان ايجابيان مجموعها عشرة وفرضنا احدهما ك والآخرى  
كان لنا  $ك + ي = ١٠$  ك  $١٠ - ي = ك$  فبكية  $ي$  لانوافق المسئلة سوى ان تكون  
صحيحة ايجابية فيمكن ان نفرض لما ابدى قيمة صحيحة كانت من ١ الى ١٠ ولكن يجب ان  
تكون ك ايضا صحيحة ايجابية فلا نفرض  $ي$  اكثر من ١٠ والا لكانت ك سلبية فلا  
تكون  $ي$  اكثر من ٩

فان فرض  $ي = ١ \ ٢ \ ٣ \ ٤ \ ٥ \ ٦ \ ٧ \ ٨$  تكون  $ك = ٩ \ ٨ \ ٧ \ ٦ \ ٥ \ ٤ \ ٣ \ ٢$   
والجملعات الاربعة الاخيرة هي مثل الاربعة الاولى .  
فيكون للمسئلة خمسة اجوبة

(مسئلة ١) اقس ٢٥ الى قسمين احدهما قابل الانقسام على ٢ والاخر على ٣

لنفرض احدهما ٢ ك والاخر ٣ ي

$$\text{فلما } ٢ ك + ٣ ي = ٢٥ \text{ ك } = \frac{٢٥ - ٣ ي}{٢}$$

فندري من هذا الكسر ان ٣ ي اقل من ٢٥ فيكون  $ي$  اقل من ٨ واذا  
قمنا بصورة الكسر على المخرج فلنا  $ك = ١٢ - ي + \frac{١ - ي}{٢}$  فندري ان  $١ - ي$   
او بالاحرى  $١ - ي$  يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض  $١ - ي = ٢ ل$  فاذا  $ي = ١ - ٢ ل$

وبالتعويض  $ك = ١٢ - ٢ ل - ١ - ٢ ل = ١١ - ٤ ل$  ولا يمكن ان تكون  
 $ي$  اكثر من ٨ فنفرض اي عدد كان على شرط ان لا يكون  $١ + ٢ ل$  اكثر من  
٨ فلا بد ان تكون  $ل$  اقل من ٤ ولا تكون اكثر من ٣

فان فرض  $ل = ٠ \ ١ \ ٢ \ ٣$  فلنا

لنا  $١ - ي = ٢ ل$   $٢ - ي = ٤ ل$   $٣ - ي = ٦ ل$   $٤ - ي = ٨ ل$

و  $١١ - ك = ٤ ل$   $٧ - ك = ٦ ل$   $٥ - ك = ٨ ل$   $٢ - ك = ١٠ ل$

فاذا  $ل = ٢$   $ك = ٣$   $٢٢ + ٣ = ٢٥$  او  $١٦ + ٩ = ٢٥$  او  $١٠ + ١٥ = ٢٥$

(مسئلة ٢) اقس ١٠٠ الى قسمين احدهما يقبل الانقسام على ٧ والاخر على ١١

لنفرض القسمين  $٧ ك$  و  $١١ ي$  فلنا  $٧ ك + ١١ ي = ١٠٠$  ك =

$$\frac{١٠٠ - ١١ ي}{٧} = ١٤ - ي + \frac{٢ - ي}{٧}$$

او  $٤ - ي = ٢$  يقبل الانقسام على ٧ وان كان  $٤ - ي = ٢$  يقبل الانقسام على ٧ فنصفها

اي ٢-١ يقبل الانقسام على ٧ ايضاً. فلنفرض ٢-١-١=٧ ل فلنا  
 $1+7=2$

وبالتعويض ك=١٤-١-٢ ل وقد فرض ٢-١=٧ ل+١=٦ ل+  
 ل+١ فلنا

٢-١=٧ ل+١=٢ ل ثم لنفرض ل+١=٢ ل فلنا ل=٢-١  
 وبالتعويض ٢-١=٧ ل+١=٢ ل فنفرض ر اي عدد صحيح شتينا على شرط ان  
 لا يكون ك اوى سلبين. وبالتعويض لنا ٢-١=٧ ل+١=٢ ل  
 فنرى من الاولى ان ٧ ل في اكثر من ٢ ومن الثانية ان ١١ ل في اقل من ١٩ اي ر  
 في اقل من  $\frac{19}{11}$  فلا تكون ر اكثر من ٢ ولا يمكن ان تكون صفراً. فلا بد ان تكون  
 واحداً. فلنا ك=٨ ١=٤ ٨×٧=٥٦ ٤×١١=٤٤ فالتسمان هما  
 ٤٤ و ٥٦

(مسئلة ٢) انقسم ١٠٠ الى قسمين بحيث اذا انقسم الاول على ٢ وبقي ٢ واذا انقسم  
 الثاني على ٧ وبقي ٤

لنفرض الواحد ٥ ك=٢ والثاني ٧ ي+٤ فلنا  
 ٥ ك+٧ ي=١٠٠ ٥ ك=١٠٠-٧ ي ١٠٠-٧ ي=٢-٤ ي  
 ٢=١٠٠-٧ ي-٤ ي ١٨=١٠٠-١١ ي  $\frac{100-18}{11}$

فاذا ٤-٢ ٢=١٠٠-٧ ي-٤ ي اونصفها ٢-١ يقبل الانقسام على ٥  
 فلنفرض ٢-١=٧ ي=٢=١٠٠-٧ ي-٤ ي وقد تقدم ان ٥ ك=٧ ي+٥  
 ٩٤ فلنا بالتعويض ك=١٦-٧ ل فلا بد ان يكون ٧ ل اقل من ١٦ ول  
 اقل من  $\frac{16}{7}$  اي لا تكون ل اكثر من ٢

فان فرض ل=٠ فلنا ك=١٦ ٢=١٦ و التسمان هما ١٦×٥  
 ٨٢=٢ و ١٨=٤+٧×٢

وان فرض ل=١ فلنا ك=٩ ١=٩ و التسمان هما ٩×٥  
 ٤٧=٢ و ٥٣=٤+٧×١

وان فرض ل=٢ فلنا ك=٢ ٢=٢ و التسمان هما ٢×٥  
 ١٢=٢ و ٨٨=٤+٧×٢

(مسئلة ٤) امرأتان معاً ١٠٠ يضة فقالت الواحدة ان عدت البيض الذي  
 معي ثمانية ثمانية يبقى ٧ يضاوات وقالت الاخرى ان عدت الذي معي عشرة عشرة يبقى







٧٠ ١٠٥ ١٤٠ ١٧٥ ٢١٠ الى آخره

ولو زيد على الشروط المذكورة ان العدد يقبل الانقسام على ١ ايضا لكان لنا ما  
تقدم = ٢٥ ل ونفرض ن = ٢ ر ٢٥ ل = ٢ ر ر =  $\frac{٢٥}{١}$  ولا بد ان ل  
يقبل الانقسام على ١ فلنفرض ل = ١ س فلنار = ٢٥ س ون = ٢٥ × ١ س  
= ٢١٥ س فلنا ٢١٥ و ٦٣٠ و ٩٤٥ الى آخره

٢٥٧ ان لم تكن س = ٠ فتعبر المسئلة اكثر فلو قيل ما العدد الذي يقبل  
الانقسام على ٥ واذا انقسم على ٧ بقي ٢ فلنا ٥ ك = ن و ٧ ي = ٢ + ن فاذا  
٥ ك = ٢ + ٧ ي = ٢ + ٧  $\frac{٢٥}{١}$  = ٢ + ٧  $\frac{٢٥}{١}$  =  $\frac{٢ + ٧ \times ٢٥}{١}$  + ي =  $\frac{٢ + ٧ \times ٢٥}{١}$

فلنفرض ٢ + ٧ ي = ٥ ل  
ل =  $\frac{٢ + ٧ \times ٢٥}{١}$  فاذا ك = ٧ ي + ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥  $\frac{٢ + ٧ \times ٢٥}{١}$   
= ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل  
ك = ٧ ي + ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل = ٢ + ٧ ي + ٥ ل  
فاذا ن = ٢٥ ر + ٤٥ فيمكن ان نفرض ر اي عدد صحيح شئنا ايجابا او  
سلبا اذ يكفي ان تكون ن ايجابية. فان فرض ر = ١ لنا ن = ١٠  
وباضافة ٢٥ لنا ٤٥ ٨٠ ١١٥ ١٥٠ الى آخره

ثم ان حل المسائل من هذا النوع يتيسر او يتعسر حسب النسبة الواقعة بين الاعداد  
المقسوم عليها ومن المسائل السهلة هذه

اي عدد اذا انقسم على ٦ بقي ٢ واذا انقسم على ١٢ بقي ٢ فلنفرض العدد ن فلنا  
ن = ٦ ك + ٢ ن = ١٢ ي + ٢ ٦ ك + ٢ = ١٢ ي + ٢ ٢ ك + ٢ = ١٢ ي + ٢ ٢ ك = ١٢ ي  
ك = ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي  
٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي ٦ ي = ١ + ٦ ي  
ن = ٧٨ ل - ١٠ فلنا

ن = ٦٨ ١٤٦ ٢٢٤ ٣٠٢ ٣٨٠ الى آخره  
(مسئلة ٨) اي عدد اذا انقسم على ٢٩ بقي ١٦ واذا انقسم على ٥٦ بقي ٢٧  
لنفرض ن = ٢٩ ف + ١٦ ن = ٥٦ ق + ٢٧  
٢٩ ف + ١٦ = ٥٦ ق + ٢٧ ٢٩ ف = ٥٦ ق + ١١  
ف =  $\frac{٥٦ ق + ١١}{٢٩}$  ق =  $\frac{١١ + ٢٩ ق}{٢٩}$  افرض  $\frac{١١ + ٢٩ ق}{٢٩}$  = ر ثم ٢٩ ر =

$$١٧ ق + ١١ = ق = \frac{١١-٢٩}{١٧} + ٢ = \frac{١١-٢٥}{١٧} \text{ افترض } \frac{١١-٢٥}{١٧} = س \text{ ثم } ١٧ س = ١١ - ٢٥ = -١٤ \text{ ر } = \frac{١١+١٧}{٥} = ٥ س = ١١ + ٢٢$$

$$\text{افترض } \frac{١١+٢٢}{٥} = ت = ٥ ت = ١١ + ٢٢ = ٣٣$$

$$س = \frac{١١-٥}{٢} = \frac{١١-٣}{٢} = ٤ \text{ ت } = \frac{١١-٣}{٢} + ٢ = ٤$$

$$\text{افترض } \frac{١١-٣}{٢} = د = ٤ د = ١١ + ٢٢ = ٣٣$$

فقد تخلصنا من الكسور ولنعرض عن كل كبة فبينها

$$٣٣ = ت + ٢٢$$

$$٣٣ = س + ٢٢$$

$$٣٣ = ر + ١٧$$

$$٣٣ = ق + ١٧$$

$$٣٣ = ف + ٥٦$$

$$٣٣ = ن = ٥٦ + (٢٩ \times ٢٥) + ١٦ = ١٨٨٣$$

$$٣٣ = و = ٥٦ + (١٧ \times ٥٦) + ٢٧ = ١٨٨٣$$

$$\text{اي ن} = ١٨٨٣ + ٢١٨٤ = ٤٠٦١ \text{ و } \frac{١٨٨٣}{٢١٨٤} = ٤ \text{ فلا تكون د اقل من } ٤$$

وعلى هذا المفروض لنا  $١١٤٧ = ن$  وإن فرضنا  $د = ك - ٤$  فلنا  $ن = ٢١٨٤ ك$

$١١٤٧ +$  وما على سلسلة حماية الحلقة الأولى منها  $١١٤٧$  وفضلها المشترك  $٢١٨٤$  فلنا  $١١٤٧$  و  $٢٢٢١$  و  $٥٥١٠$  و  $٧٦٩٩$  و  $١٨٨٣$  إلى آخره

(مسئلة ٩) رجال ونساء جمعوا صدقة فدفع كل رجل  $٢٥$  غرشاً وكل امرأة

$١٦$  غرشاً . فكان ما دفعه النساء جميعاً أكثر مما دفعه الرجال جميعهم بغرش واحد .

فكم رجلاً وكم امرأة كانوا

لفرض الرجال  $ق$  والنساء  $ف$  فلنا

$$١٦ ف + ٢٥ ق = ١ ف = \frac{١٦+٢٥}{١٦} ق = \frac{١+٢٥}{١٦} ق + ر \text{ اي}$$

$$١٦ ر = ١ ق + ١$$

$$ق = \frac{١-١٦}{٩} ر = \frac{١-٢٧}{٩} ر + ١ = ١ س = ١ ر - ١$$

$$ر = \frac{١+١}{٧} س = \frac{١+٢}{٧} س + ١ = ١ ت = ١ + ٢$$

$$س = \frac{١-٢}{٢} ت = \frac{١-٣}{٢} ت + ١ = ١ د = ١ + ٢$$

باخراج  $٢ ت$  من الجانين لنا  $د = ت = ١$

ت = ١ + د ٢ ثم بالتعويض في هذه المعادلات

ت = ١ + د ٢ س = ٣ + ت د = ٧ + د ٢

ر = س + ت = ٩ + د ٤

ق = ر + س = ١٦ + د ٧

ف = ق + ر = ٢٥ + د ١١

فكان عدد النساء ٢٥ + د ١١ وعدد الرجال ١٦ + د ٧ فنفرض د أي عدد صحيح شتينا فلنا الرجال = ٧ ٢٣ ٢٩ ٥٥ ٧١ الى آخره والنساء ١١ ٢٦ ٦١ ٨٦ ١١١ الى آخره وعلى موجب الجواب الأول دفعت النساء ١٧٦ والرجال ١٧٥ غرثا

(مسئلة ١٠) رجل اشترى خيلا وبقرا وكان ثمن راس الخيل ٢١ دينارا وثن راس البقر ٢٠ دينارا فكان ثمن البقر بقدر ثمن الخيل و٧ دنانير زيادة فكم رأسا اشترى من كل جنس

لنفرض ف = البقر وق = الخيل فلنا

ف =  $\frac{٢١ + ق}{٢}$  ق =  $\frac{٧ + ق}{٢}$  ر = ٢٠ + ق ١١ + ق = ٧ + ر

ق =  $\frac{٧ - ر}{١١}$  ر =  $\frac{٧ - ر}{١١}$  س = ١١ + ر ٩ - ر = ٧

ر =  $\frac{١١ + س}{٢}$  س =  $\frac{٧ + س}{٢}$  ت = ٩ + س ٢ + س = ٧ + ت

س =  $\frac{٧ - ت}{٢}$  ت =  $\frac{٧ - ت}{٢}$  د = ٢ + ت ٢ - ت = ٧ فلنا

ت = ٧ + د ٢

س = ٩ + د ٤ + د ٢٨

ر = س + ت = ١١ + د ٢٥

ق = ر + س = ٢٠ + د ٦٣

ف = ق + ر = ٢١ + د ٩٨

ونستعلم قيمة ف وق اذا فرضنا د = ٢

فلنا البقر = ٥ ٢٦ ٦٧ ٩٨ ١٢٩ ١٦٠ الى آخره

فلنا الخيل = ٢ ٢٣ ٤٣ ٦٣ ٨٣ ١٠٤ الى آخره

(مسئلة ١١) أي عدد اذا انقسم على ١١ يبقى ٣ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥

لنفرض ن = ١١ + ف ٢ ن = ١٩ + ق ٥ ١١ + ف = ١٩ + ق ٢

فإذا نصرّفنا في هذه المسئلة على نسق المسائل المتقدم ذكرها يكون لنا مجلّ  
الاعداد الواقعة فيها

$$٨ + ١١ \times ١ = ١٩ \quad \text{ف} = \text{ق} + \text{ر}$$

$$٩ + ٨ \times ١ = ١١ \quad \text{ق} = \text{ر} + \text{س}$$

$$٢ + ٩ \times ٢ = ٨ \quad \text{ر} = ٢ \text{س} + \text{ت}$$

$$١ + ٢ \times ١ = ٣ \quad \text{س} = \text{ت} + \text{د}$$

$$٢ + ١ \times ٢ = ٤ \quad \text{ت} = ٢ + \text{د}$$

$$\text{ثم لنا ت} = ٢ + \text{د} \quad \text{س} = ٢ + \text{د} + ٢$$

$$\text{ر} = ٦ + \text{د} \quad \text{ق} = ٨ + \text{د} + ١$$

$$\text{ف} = ١٤ + \text{د} \quad \text{لنفرض د} = ٠$$

فلنا ن - ١١ = ٢ + ١١ = (١٤ + د) ١١ = ١٥٧ + د ٢٠٩ ولكن ٢٠٩

د = ٠. فإذا ١٥٧ هو اقل عدد تصحّ عليه شروط المسئلة

(مسئلة ١٢) ما العدد الذي اذا انقسم على ١١ بقي ٢ واذا انقسم على ١٩ بقي

٥ واذا انقسم على ٢٩ بقي ١٠

قد مضى حساب الشرطين الأولين في المسئلة السابقة فلنا هنا زيادة عما هناك

ن = ٢٩ + ١٠ وقد وجدنا هناك ان

$$\text{ن} = ١٥٧ + \text{د} \quad \text{ن} = ٢٠٩ + \text{ق} \quad ١٥٧ +$$

$$\text{فلنا} \quad ٢٩ + \text{ف} = ١٠ + ٢٠٩ + \text{ق} \quad ١٥٧ + \text{اي}$$

$$\text{ف} = ٢٩ + \text{ق} \quad ١٤٧ + \text{ثم لنا حبا تقدم}$$

$$٦ + ٢٩ \times ٧ = ٢٠٩ \quad \text{ف} = ٧ + \text{ق}$$

$$٥ + ٦ \times ٤ = ٢٩ \quad \text{ق} = ٤ + \text{ر}$$

$$١ + ٥ \times ١ = ٦ \quad \text{ر} = \text{س} + \text{ت}$$

$$٠ + ١ \times ٥ = ٥ \quad \text{س} = ٥ - \text{ب} \quad ١٤٧ -$$

ثم بالتعويض س = ٥ - ت ١٤٧ -

$$\text{ر} = ٦ - \text{ت} \quad ١٤٧ - \text{ق} = ٢٩ - \text{ت} \quad ٧٢٥ -$$

$$\text{ف} = ٢٠٩ - \text{ت} \quad ٥٢٩٢ -$$

ن = ٦٠٦١ - ت ١٥٢٤٥٨ ونستعمل العدد الاقل اذا فرضنا

$$\text{ت} = ٢٦ \quad \text{ثم ن} = ٤١٢٨$$

(مسئلة ١٣) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش في بشالك بسعر ٥ غروش  
وانصاف المانوت بسعر ٩ غروش

لنفرض ٥ = ك = البشالك ٩ = ي = عدة انصاف المانوت

$$٥ = ك + ٩ = ي \quad ١٠٠ = ك \quad ١٠٠ = ي - ٩ \quad ١٠٠ = ٥ - ٩ \quad ١٠٠ = ٥ - ٩$$

$$ك = ٢٠ - ي - \frac{٩}{٥}$$

فاذا ي تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض  $\frac{٩}{٥} = ف$  ف  $٥ = ف$  ف  $ك = ٢٠ - ف - ٤ = ١٦ - ف$  فاذا تكون ف اقل من  $\frac{٢}{٥}$  اي اقل من ٢ واكثر من صفرا ي ١ فلنفرض  $ف = ١$  فاذا  $ك = ١١$   $١١ = ٥ \times ٢ = ١٠ + ١$

ي  $٥ = ١ \times ٥ = ٥$  و  $٤٥ = ٩ \times ٥ = ٤٥ + ٥ = ١٠٠$  اي ليس لذلك الطريقة واحدة  
(مسئلة ١٤) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش غوازي بسعر ٢٠ غرشاً  
وفرنكات بسعر ٤ غروش ٠ لنفرض الغوازي  $٢٠ = ك$  والفرنكات  $٤ = ي$

$$٢٠ = ك + ٤ = ي \quad ١٠٠ = ي - ٤ \quad ١٠٠ = ٢٠ - ك$$

$$٢٠ = ي - ٤ = ك \quad ٢٠ = ك \quad ٢٠ = ك$$

ي  $٢٠ = ك - ٤ = ١٦$  لنفرض  $ف = ٤$   $٤ = ك - ٤ = ٨$   $٨ = ك - ٤ = ١٢$   $١٢ = ك - ٤ = ١٦$   $١٦ = ك - ٤ = ٢٠$   $٢٠ = ك - ٤ = ٢٤$   $٢٤ = ك - ٤ = ٢٨$   $٢٨ = ك - ٤ = ٣٢$   $٣٢ = ك - ٤ = ٣٦$   $٣٦ = ك - ٤ = ٤٠$   $٤٠ = ك - ٤ = ٤٤$   $٤٤ = ك - ٤ = ٤٨$   $٤٨ = ك - ٤ = ٥٢$   $٥٢ = ك - ٤ = ٥٦$   $٥٦ = ك - ٤ = ٦٠$   $٦٠ = ك - ٤ = ٦٤$   $٦٤ = ك - ٤ = ٦٨$   $٦٨ = ك - ٤ = ٧٢$   $٧٢ = ك - ٤ = ٧٦$   $٧٦ = ك - ٤ = ٨٠$   $٨٠ = ك - ٤ = ٨٤$   $٨٤ = ك - ٤ = ٨٨$   $٨٨ = ك - ٤ = ٩٢$   $٩٢ = ك - ٤ = ٩٦$   $٩٦ = ك - ٤ = ١٠٠$

$$١٠٠ = ٢٠ + ٨٠ \quad ٥ = ي \quad ٤ = ك \quad ١ = د$$

$$١٠٠ = ٤٠ + ٦٠ \quad ١٠ = ي \quad ٢ = ك \quad ٢ = د$$

$$١٠٠ = ٦٠ + ٤٠ \quad ١٥ = ي \quad ٣ = ك \quad ٣ = د$$

$$١٠٠ = ٨٠ + ٢٠ \quad ٢٠ = ي \quad ٤ = ك \quad ٤ = د$$

(مسئلة ١٥) ثلاثون نفراً من رجال ونساء ولولاد انتقوا ٥٠ ديناراً وكل رجل منهم انتقى ٣ دنانير وكل امرأة دينارين وكل ولد ديناراً واحداً. فكم كان كل فريق  
لنفرض الرجال = ف والنساء = ق والاولاد = ر

$$فلنا (١) ف + ق + ر = ٣٠$$

$$وايضاً (٢) ٣ف + ٢ق + ر = ٥٠$$

$$من الاولى لنا ر = ٣٠ - ف - ق$$

$$فنرى ان ف + ق + ٣٠ - ف - ق = ٣٠$$

$$وبالتعويض في (٢) ٣ف + ٢ق + ٣٠ - ف - ق = ٥٠$$

بالمقابلة والجمع  $ق = ٢٠ - ٢$  ف

بقل ف واحدة ف +  $ق = ٢٠ - ف$

وذلك ايضاً اقل من ٢٠ فبشروط المسئلة لا تكون ف اكثر من ١٠ ويمكن

ان نفرض ف اي عدد شئنا من ١ الى ٢ فلنا

ف = ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

ق = ١٨ ١٦ ١٤ ١٢ ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢

ر = ١١ ١٢ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩

(مسئلة ١٦) رجل اشترى من البقر والمعزى والغنم ١٠٠ رأس بمئة دينار وكان

ثمان الرأس من البقر  $\frac{٢}{١}$  دينار وثمان الرأس من المعزى  $\frac{١}{٢}$  دينار وثمان الرأس من

الغنم  $\frac{١}{٢}$  دينار. فكم رأساً اشترى من كل جنس.

لنفرض ف = البقر ق = المعزى ور = الغنم

فلنا (١)  $ف + ق + ر = ١٠٠$

(٢)  $\frac{٢}{١} ف + \frac{١}{٢} ق + \frac{١}{٢} ر = ١٠٠$

اضرب في ٦  $٢١ ف + ٨ ق + ٣ ر = ٦٠٠$

بالاولى لنا  $ر = ١٠٠ - ف - ق$

عوّض عن ر في (٢)  $١٨ ف + ٥ ق = ٢٠٠$

$٥ ق = ٢٠٠ - ١٨ ف$   $ق = \frac{٢٠٠ - ١٨ ف}{٥}$

فلا بد ان ف تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض ف = ٥ س فلنا  $ق = ٦٠ - ٥ س$

١٨ س

$ر = ١٢٠ - ٥ س$  فيمكن ان نفرض قيمة س اي عدد شئنا على شرط ان ق

لا تصير بذلك سلبية ولا يمكن ذلك الا على فرض س اقل من ٢٤

فلنا س = ١ ٢ ٣

ف = ٥ ١٠ ١٥

ق = ٤٢ ٢٤ ٦

ر = ٥٢ ٦٦ ٧٩

٢٥٨ في اختراع مسائل من هذا الباب ينبغي الاحتراس من استعمالها. ولا بد

في ذلك من ملاحظة ما سنذكره هنا. فنضع عرضاً عن المعادلتين اللتين في المسئلة



السابقة هاتين

$$ك + ي + ل = ت$$

$$ف + ك + غ + ي + ح + ل = ب$$

حيث تكون ف غ ح ت ب معلومات

فان فرضنا ف اكبر من غ وح اصغر من غ وضررنا المجانين في ف اي  
(ك + ي + ل) ف = فت فلا شك ان تكون ف ك + ف ي + ف ل اكبر  
من ف ك + ف غ + ف ي + ف ح ل وتكون فت اكبر من ب اي ب > فت وايضا  
اذا فرضنا (ك + ي + ل) ح = ح ت تكون ح ك + ح ي + ح ل اصغر من  
ف ك + ف غ + ف ي + ف ح ل وتكون ح ت اصغر من ب اي ب < ح ت فاذا  
ان لم تكن ب اصغر من فت واكبر من ح ت نستعمل المسئلة فاذا يجب ان  
تقع ب بين الحدين فت ح ت ولا يجب ان تكون قريبة جدا من احدهما والا  
فلا يمكن استعمال الاحرف الاخر في المسئلة السابقة = ١٠٠ ف = ٣ ١/٢ ح = ١/٢  
والحدان هما ٢٥٠ و ٥٠ وان فرضنا ب = ٥١ عوضا عن ١٠٠ كي في المسئلة فلنا

$$ك + ي + ل = ١٠٠$$

$$٢ ١/٢ ك + ١ ١/٢ ي + ١/٢ ل - ٥١ = \text{اضرب الاولى في } ٢$$

$$٢ ك + ٢ ي + ٢ ل = ٢٠٠ \text{ اضرب الثانية في } ٦$$

$$٢١ ك + ٨ ي + ٢ ل = ٢٠٦$$

$$\text{بالطرح } ١٨ ك + ٥ ي = ٦$$

وذلك محال لانه يفرض كون ك وي صحيحين

(مسئلة ١٧) صاتع عنده من النضة ثلاثة انواع

الاول في كل ٨ دراهم منه ٧ فضة ودرهم زيف

الثاني " " " ٥ ١/٢ " " " ٢ ١/٢

الثالث " " " ٤ ١/٢ " " " ٢ ١/٢

فاراد ان يصوغ مصاغاً وزنه ٢٤٠ درهماً في كل ٨ دراهم منه ٦ دراهم فضة ودرهم

زيف فكم درهماً يجب ان يأخذ من كل صنف

لتفرض ما يجب اخذه من النوع الاول = ك ومن الثاني = ي ومن الثالث

$$= ل فلنا ك + ي + ل = ٢٤٠ ويكون في الكل ٧ ك + ٥ ١/٢ ي + ٤ ١/٢ ل من$$

$$\text{النضة الخالصة ووزن هذا المزيج} = ٢٤٠ \text{ درهماً و } \frac{٢٤٠}{٨} = ٣٠$$

$$\text{و } ٦ \times ٢ = ١٨٠ = \text{النضة الخالصة في المزيج}$$

فلنا  $٧ك + ٥\frac{١}{٢}ي + ٤\frac{١}{٢}ل = ١٨٠$

اضرب في ٢  $١٤ك + ١١ي + ٩ل = ٣٦٠$

اضرب الاولى في ٩  $٩ك + ٩ي + ٩ل = ٢٧٠$

بالطرح  $٥ك + ٢ي = ٩٠$

من الاولى  $ل = ٣٠ - ك - ي$

وايضاً  $٢ي = ٩٠ - ٥ك$   $ي = ٤٥ - \frac{٥}{٢}ك$

لفرض  $ك = ٢٢$  فلنا  $ي = ٤٥ - ٥ = ٤٠$

وايضاً  $ل = ٣٠ - ٢٢ - ٤٠ = ١٥$

فلا بد ان تكون د اكبر من ٤ واصغر من ١٠ فلنا

$د = ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩$

$ك = ١٠ \quad ١٢ \quad ١٤ \quad ١٦ \quad ١٨$

$ي = ٢٠ \quad ١٥ \quad ١٠ \quad ٥ \quad ٠$

$ل = ٠ \quad ٢ \quad ٦ \quad ٩ \quad ١٢$

(مثلة ١٨) رجل اشترى من الخيل والبقر والحبر والغنم ١٠٠ رأس بمئة دينار وكان ثمن رأس الخيل ١٠ دنانير وثن رأس البقر ٥ دنانير وثن الحمار دينارين وثن رأس الغنم نصف دينار فكم اشترى من كل جنس. لفرض الخيل = ف البقر = ق الحبر = ر والغنم = س

فلنا (١)  $ف + ق + ر + س = ١٠٠$

و (٢)  $١٠ف + ٥ق + ٢ر + \frac{١}{٢}س = ١٠٠$

اضرب في ٢  $٢٠ف + ١٠ق + ٤ر + س = ٢٠٠$

بالطرح  $١٩ف + ٩ق + ٣ر = ١٠٠$

بالمقابلة والقسمة  $٢٣ف + \frac{١}{٢}ق + ٦ر = ١٠٠$   $٢٣ف + \frac{١}{٢}ق = ١٠٠ - ٦ر$   $٢٣ف + \frac{١}{٢}ق = ١٠٠ - ٦ر$   $٢٣ف + \frac{١}{٢}ق = ١٠٠ - ٦ر$

فاذا  $١ - ف$  او  $١ - ق$  يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض  $١ - ف = ٢$   $١ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$

$٢ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$   $٢ - ق = ١$

فاذا تكون ١٩ - ق اقل من ٢٧ وعلى هذا الشرط نفرض ك و ت

اي حدو ثنتا

(١) ت = ٠ (٢) ت = ١

ف = ١ ف = ٤

ق = ٢ ق = ٢

ر = ٢٧ - ٢ ر = ٨ - ٢

س = ٧٢ + ٢ س = ٨٨ + ٢

ولا يمكن ان نفرض ت = ٢ لان بذلك نصير ر سلبية . وعلى المفروض الاول  
لا تكون ق اكثر من ١ وعلى الثاني لا تكون اكثر من ٢ فعلى الاول لنا

ق = ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

ف = ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١ ١

ق = ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

ر = ٢٧ ٢٤ ٢١ ١٨ ١٥ ١٢ ٩ ٦ ٣ ٠

س = ٧٢ ٧٤ ٧٦ ٧٨ ٨٠ ٨٢ ٨٤ ٨٦ ٨٨ ٩٠

وعلى الثاني ت = ١ ٢ ٣

ف = ٤ ٤ ٤

ق = ٠ ١ ٢

ر = ٨ ٥ ٢

س = ٨٨ ٩٠ ٩٢

(مسئلة ١٩) مطلوب ثلاثة اعداد صحيحة اذا ضرب الاول منها في ٢ والثاني في ٥

والثالث في ٧ يكون مجموع الحواصل ٥٦٠ واذا ضرب الاول في ٩ والثاني في ٢٥

والثالث في ٤٦ يكون مجموع الحواصل ٢٩٢٠

لنفرض (١) ٢ك + ٥ي + ٧ل = ٥٦٠

(٢) ٩ك + ٢٥ي + ٤٦ل = ٢٩٢٠

اضرب الاولى في ٩ ك + ١٥ي + ٦٣ل = ٥٠٤٠

بالطرح ١٢٤٠ = ٢٨ل + ١٠ي

بالقسمة على ٢ ٦٢٠ = ١٤ل + ٥ي

وبالمقابلة والقسمة ١٢٤ = ١٤ل - ٥ي

لنفرض ل = ٥ د فاذا ١٢٤ = ١٤د - ٥ي

ثم بالتعويض في الاول لنا ٥٦٠ = ٦٢٠ + ٥د - ٥ي

اي ٢ ك = ٢٥ د - ٦٠

ك =  $\frac{25}{3}$  - ٢٠ فلنفرض د = ٢ ت

فإذا ك = ٢٥ ت - ٢٠ ي = ١٢٤ - ٤٢ ت ل = ١٥ ت فتكون

ت أكبر من صفر واصغر من ٢ ولنا جوابان فقط اي

ت = ١ ك = ١٥ ي = ٨٢ ل = ١٥

ت = ٢ ك = ٥٠ ي = ٤٠ ل = ٢٠

(مسئلة ٢٠) مطلوب عدنان مجتمعا مع حاصلها ٧٩

لنفرض العددين ك وى فلنا كى + ك = ٧٩ كى + ى = ٧٩

ك - ى =  $\frac{79 - 79}{1 + 1} = 0$  فنرى ان ٨٠ يقبل الانقسام على ك + ١

و ٨٠ يقبل الانقسام على ١ ٢ ٤ ٨ ١٠ ١٦ ٢٠ ٤٠ ٨٠

فإذا ك = ٠ ١ ٢ ٤ ٧ ٩ ١٥ ١٩ ٢٩ ٧٩

ى = ٧٩ ٢٩ ١٩ ١٥ ٩ ٧ ٤ ٢ ١ ٠

ومن هذه عشرة الخمسة الاخيرة مثل الخمسة الاولى. فلنا في الحقيقة ٥ اجوبة فقط وهي

ك = ٠ ١ ٢ ٤ ٧

ى = ٧٩ ٢٩ ١٩ ١٥ ٩

(مسئلة ٢١) اربعة رجال نزلوا الى السوق فوجسوا جوهرة تباع. فقالوا كم ثمن

الجوهرة فقبل اذا اخذ ما مع الاول منكم مع  $\frac{1}{2}$  ما مع الثاني و  $\frac{1}{4}$  ما مع الثالث و  $\frac{1}{8}$  ما

مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة. واذا اخذ ما مع الثاني و  $\frac{1}{4}$  ما مع الاول و  $\frac{1}{8}$  ما مع

الثالث و  $\frac{1}{16}$  ما مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة. واذا اخذ ما مع الثالث و  $\frac{1}{8}$  ما مع

مع الاول و  $\frac{1}{16}$  ما مع الثاني و  $\frac{1}{32}$  ما مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة. واذا اخذ ما مع

الرابع و  $\frac{1}{16}$  ما مع الاول و  $\frac{1}{32}$  ما مع الثاني و  $\frac{1}{64}$  ما مع الثالث كان المجموع ثمن الجوهرة

مطلوب اصفر الاعلاد الصحيحة التي تضع عليها شروط المسئلة

نرى من شروط المسئلة ان الحصة الصغرى للاول من الاربعة فلنفرض الرجال

ك وى ول ون وثمن الجوهرة ت فلنا

ك =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$  ت = ن =  $\frac{17}{16}$  - ١٢ ت - ١٢ ك - ٦ ي - ٤ ل

ى =  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$  ت = ن =  $\frac{17}{16}$  - ٢١ ت - ٤٢ ك - ٢١ ي - ٢٠ ل

ل =  $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$  ت = ن =  $\frac{17}{16}$  - ٣٦ ت - ٤٥ ك - ٤٠ ي - ٣٦ ل

ن =  $\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$  ت = ن =  $\frac{17}{16}$  - ١٧١٦ ت - ١٥٦ ك - ١٤٢ ي - ١٣٢ ل

١٧١٦

ثم بالمساواة

$$\begin{aligned}
 ١٢ \text{ ت} - ١٢ \text{ ك} - ٦ \text{ ي} - ٤ \text{ ل} &= ٢١٠ \text{ ت} - ٤٢ \text{ ك} - ٢١٠ \text{ ي} - ٢٥ \text{ ل} \\
 ٢١٠ \text{ ت} - ٤٢ \text{ ك} - ٢١٠ \text{ ي} - ٢٥ \text{ ل} &= ٢٣٠ \text{ ت} - ٤٥ \text{ ك} - ٤٠ \text{ ي} - ٢٦٠ \text{ ل} \\
 ٢٣٠ \text{ ت} - ٤٥ \text{ ك} - ٤٠ \text{ ي} - ٢٦٠ \text{ ل} &= ١٧٦ \text{ ت} - ١٥٦ \text{ ك} - ١٤٢ \text{ ي} - ١٢٢ \text{ ل} \\
 ١٧٦ & \\
 ١٥٠ \text{ ي} - ٧٨ \text{ ك} - ٩٠ \text{ ت} &= \text{ل} \\
 ٥٤٠ \text{ ت} + ٢٧ \text{ ك} + ١٠٦٠ \text{ ي} &= \text{ل} \\
 ٤٦٣٢ \text{ ت} - ٥٩٦٧ \text{ ك} - ٥٢٩١ \text{ ي} &= \text{ل} \\
 ٥١٠٨٤ &
 \end{aligned}$$

بالمساواة ايضا

$$\begin{aligned}
 ١٥٠ \text{ ي} - ٧٨ \text{ ك} - ٩٠ \text{ ت} &= ٥٤٠ \text{ ت} + ٢٧ \text{ ك} + ١٠٦٠ \text{ ي} \\
 ٥٤٠ \text{ ت} + ٢٧ \text{ ك} + ١٠٦٠ \text{ ي} &= ٤٦٣٢ \text{ ت} - ٥٩٦٧ \text{ ك} - ٥٢٩١ \text{ ي} \\
 ٥١٠٨٤ & \\
 ٢٩١٦٠ \text{ ت} + ٢٤٨٣١ \text{ ك} &= \text{ي} \\
 ٤٦٦٤٠ & \\
 ١٨١١١٣٣ \text{ ت} - ٧٨٠٤٢٠ \text{ ك} &= \text{ي} \\
 ١٠٤٢٦٩٥٥ &
 \end{aligned}$$

بالمساواة ايضا

$$\begin{aligned}
 ٢٩١٦٠ \text{ ت} + ٢٤٨٣١ \text{ ك} &= ١٨١١١٣٣ \text{ ت} - ٧٨٠٤٢٠ \text{ ك} \\
 ٤٦٦٤٠ & \\
 ٢٤٠٧٣٣٦٠ \text{ ت} &= \text{ك} \\
 ١٥٢٦١٤٦٥٠١ &
 \end{aligned}$$

فإذا ت قبل الانقسام على مخرج هذا الكسر ولكي يكون لنا عدد صحيح يجب

ان نترض ت هذا المخرج نفسه. فلنا ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١

$$١٠٨٢٢٢٢٩٨٨ = \text{ي} \quad ٢٤٠٧٣٢٦٠ = \text{ك}$$

$$١٢٤٩٩٥٧٨٠٦ = \text{ل} \quad ١٢١٨٢٧٨١٨٠ = \text{ن}$$

$$٢٤٠٧٣٢٦٠ = \text{ك} \quad ١٠٨٢٢٢٢٩٨٨ = \text{ي}$$

$$٥٤١١٦٦٦٩٤ = \text{ي} \quad ٤٨١٤٦٤٧٢ = \text{ك}$$

$$٤١٤٦٥٢٦٠٢ = \text{ل} \quad ٢٠٧٣٢٦٣٠١ = \text{ل}$$

$$٢٢٩٥٩٤٥٤٥ = \text{ن} \quad ١٨٨٢٢٦١٤٠ = \text{ن}$$

$$١٥٢٦١٤٦٥٠١ = \text{ت} \quad ١٥٢٦١٤٦٥٠١ = \text{ت}$$

١٢٤٣٦٥٧٨٠٦ - ل	١٢١٨٢٧٨١٨٠ = ن
$\frac{٢٠٠٦١٥٤٥}{٨} = \frac{ك}{١١}$	$\frac{٢١٨٨٤٧٦٠}{١١} = \frac{ك}{١١}$
$\frac{١٢٠٢٥٦٢٢٢}{٩} = \frac{ي}{١٢}$	$\frac{٦٠١٦٤٤٩٩}{١٢} = \frac{ي}{١٢}$
$\frac{١٢١٨٢٧٨١٨}{١٠} = \frac{ن}{١٢}$	$\frac{٦٥٦٨٩٠٦٢}{١٢} = \frac{ل}{١٢}$
١٥٢٦١٤٦٥٠١ = ت	١٥٢٦١٤٦٥٠١

(مسئلة ٢٢) مطلوب عدنان مربعان يكون مجموعهما مربعاً ايضاً  
 لنفرض العددين ك' وت' فيكون ك' + ت' مربعاً. وكية ك' + ت' هي اكبر  
 من كية (ك - ت) لان هذه الاخيرة = ك' - ٢ ك ت + ت' فلنفرض ك' + ت'  
 = (م - ك - ت) فلنا ك' + ت' = م' - ٢ م ك ت + ت' وبالمقابلة  
 ك' = م' - ٢ م ك ت اي ك' = م' - ٢ م ت م' - ك' - ٢ م ت  
 ك' =  $\frac{٢ م' - م' - ٢ م ت}{١ - ٢ م}$  فاذا العدنان هما ت' و  $\frac{٢ م' - م' - ٢ م ت}{١ - ٢ م}$  فيمكن ان نفرض ت' وم اي  
 عددين شئنا ولكن لكي يكون  $\frac{٢ م' - م' - ٢ م ت}{١ - ٢ م}$  صحيحاً ينبغي للصورة ان قبل الانقسام على الخارج  
 ويكون الخارج صحيحاً. فان فرض م = ٢ وت = ٢ فلنا العدنان ١٦ و ٩ ومجموعهما  
 ٢٥ واذا فرض م = ٢ وت = ٥ فلنا العدنان  $\frac{٢٢٥}{١٦}$  و ٢ ومجموعهما  $\frac{٢٢٥}{١٦}$  واذا فرض  
 م = ٢ وت = ٨ فلنا ٣٦ و ٦٤ ومجموعهما ١٠٠ ولم يجز

(مسئلة ٢٣) مطلوب عدد ك بحيث يكون ك + ت وك - ت مربعين  
 لنفرض ك + ت = م' ثم ك - ت = م' - ٢ م ت  
 افرض م' - ٢ م ت = (م - ت) = م' - ٢ م ت + ت' ثم م' - ٢ م ت =  
 م + ت' او م' - ٢ م ت = م' + ت' وم' =  $\frac{٢ + ت}{٢}$  م' =  $\frac{٢ + ت + ٤ + ت}{٤}$   
 وك' = م' - ت =  $\frac{٢ + ت}{٢} - \frac{٢ + ت + ٤ + ت}{٤}$  فلنا هذه القضية العمومية وهي  
 اذا رُبع عدد و اضيف الى مربعه ٤ وانقسم المجمع على ٤ يكون الخارج عدداً مجموعته مع  
 العدد المتروك وفضلتها عدنان مربعان. فاذا فرضنا  
 ت = ١ لنا ك =  $\frac{٢ + ١}{٤} = \frac{٣}{٤}$  ك + ت =  $١ + \frac{٣}{٤} = \frac{٧}{٤}$  ك - ت =  
 $\frac{١}{٤} = ١ - \frac{٣}{٤} =$

$$\begin{aligned} \text{ت} = ٢ \text{ ثم ك} &= \frac{٢ + ٢}{٤} = ١ \text{ ك} + \text{ت} = ٤ \text{ ك} - \text{ت} = ٠ \\ \text{ت} = ٣ \text{ ك} &= \frac{٢ + ٩}{٤} = \frac{١١}{٤} \text{ ك} + \text{ت} = ٣ + \frac{١١}{٤} = \frac{٢٣}{٤} \\ \text{ك} - \text{ت} &= ٣ - \frac{١١}{٤} = \frac{١}{٤} \end{aligned}$$

$$ت = ٤ \quad ك = \frac{٤+١٦}{٤} = ٥ \quad ك + ت = ٩$$

ك - ت = ١ ولم جراً

(مسئلة ٢٤) مطلوب ثلاثة اعداد مربعة على سلسلة حماية

لتفرض الاعداد ك' وى' ول' ثم ك' + ل' = ٢' اى' افرض ك' = ف' + ق'

ول' = ف' - ق' ثم ك' + ل' = ف' + ق' + ف' - ق' = ٢' اى'

ف' + ق' = ٢' اى' فتمولت المسئلة الى نوع مسئلة ٢٢ فلنفرض ف' =  $\frac{٢٢}{١-٢}$  حيث

ق' = ت

$$ثم ك' = ف' + ق' = \frac{٢٢}{١-٢} + ت$$

$$ل' = ف' - ق' = \frac{٢٢}{١-٢} - ت$$

$$ى' = \frac{٢(١+٢)}{١-٢} = \frac{٦}{١-٢} = -٦$$

فيمكن ان نفرض ت وم اى' هدي شئنا

لتفرض ت = ٢ وم = ٢ ثم ك' = ٧ ى' = ٥ ل' = ١ والاعداد

المطلوبة هي ٢٥ ٤٩ ١

افرض ت = ٨ م = ٢ ثم ك' = ١٤ ى' = ١٠ ل' = -٢ والاعداد هي

١٩٦ ١٠٠ ٤

(مسئلة ٢٥) مفروض ٢٤ ك' = ١٢ ى' + ١٦ فاي قيمة ك' وى' صحيحة

الجواب ك' = ٥ ى' = ٨

(٢٦) مفروض ٨٧ ك' + ٢٥٦ ى' = ١٥٤١٠ مطلوب قيمة ك' الصغرى وقيمة

ى' الكبرى في صحيح الجواب ك' = ٢٠ ى' = ١٢٨٠٠

(٢٧) كم قيمة صحيحة للاحرف في ٥ ك' + ٧ ى' + ١١ ل' = ٢٢٤ الجواب ٦٠

(٢٨) رجل اشترى ٢٠ طائراً بعشرين غرشاً اى' اوزاً بسعر الطير اربعة غروش

وحاماً بسعر الطير نصف غرش وعصافير بسعر الطير ١/٢ غرش فكم اشترى من كل

جنس الجواب اوز ٢ حمام ١٥ عصافير ٢

(٢٩) ما هو العدد الاصغر الذي يقبل الانقسام على الاعداد الطبيعية من ١ الى

٩ بدون باقى الجواب ٢٥٢٠

تبيية. هذا الباب واسع جداً ويمكن الامتداد فيه الى ما لا نهاية له. وقد اكتبنا

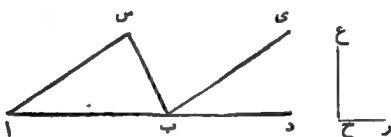
بما ذكرناه طلب الاختصار. ولا يمكن وضع قواعد خصوصية لكثير من مسائله وما تقدم

شرحه كافٍ للدلالة على الجليل التي يستعان بها في حل هذه

## الفصل السادس والعشرون

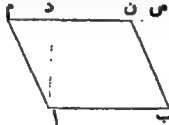
في احتكام الجبر لحل المسائل الهندسية

٢٥٩ قد نُكْتُبَ البراهين الهندسية في عبارات جبرية . مثالة ان الزوايا  
الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين



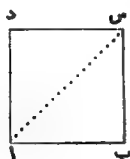
- (١) حسب اقليدس (ق ٢٩ ك ١)  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
  - (٢)  $\angle A + \angle B = \angle C$
  - (٣) بالجمع  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
  - (٤) اضع  $\angle A + \angle B + \angle C$  للجانبين فتصير  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
  - (٥) حسب اقليدس (ق ١٤ ك ١)  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
  - (٦) بمساواة (٥) و (٤)  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
- قائمتين

٢٦٠ تُعرَف مساحة معين بضرب القاعدة في الارتفاع عليها . مثالة في شكل



ان  $AB \times CD$  تكون مساحة  $AB \times CD$  او  $AB \times CD$   
لان  $AB \times CD =$  مساحة شكل  $AB \times CD$  وحسب  
اقليدس (ق ٢٦ ك ١) اشكال متوازية الاضلاع على

قواعد متساوية وبين خطين متوازيين في متساوية اي  $AB = CD$



٢٦١ تُعرَف مساحة المربع بضرب احد اضلاعه في

نفسه . مثالة مساحة المربع  $AB \times AB = AB^2$  لا  $AB^2$

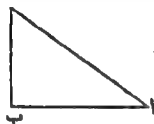
$AB \times AB = AB^2$





اي في كل مثلث قائم الزاوية يعدل العمود مربع جميع الوتر والعمود الآخر مربع القاعدة  
مقسوماً على مضاعف مجموع الوتر والعمود

(ع ٢) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية وفضله الوتر  
والعمود المطلوب العمود



لنفرض  $اب = ت = ٢٠$  و  $ب س = ك$  و فضله  $ا ب = ف = ١٠$  فيكون الوتر  $اس = ك + ف$

$$(١) \text{ حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) } اس = اب + ب س, \quad اس = اب + ك$$

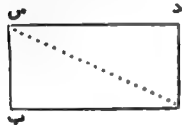
$$(٢) \text{ وبالمفروض } (ك + ف) = ت + ك$$

$$(٣) \text{ بالبسط } ك + ٢ + ك ف + ف = ت + ك$$

$$(٤) \text{ بالمقابلة والقسمه } ك = \frac{ت - ف}{٢} = ١٥$$

(ع ٣) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٠ ذراعاً. وفضله الضلعين الآخرين  
٦ اذرع. فما هو طول القاعدة

(ع ٤) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٥٠ ذراعاً. ونسبة القاعدة الى العمود  
كسبة ٤ : ٣ فما هو طول العمود



(ع ٥) مفروض محيط شكل متوازي الاضلاع  
وقطره مثل شكل  $اب س د$  مطلوب اضلاعه

$$\text{لنفرض القطر } اس = ح = ١٠$$

$$\text{والضلع } اب = ك$$

$$\text{نصف المحيط } ب س + اب = ب س + ك = د = ١٤$$

$$\text{بمقابلة } ك = نصير ب س = د - ك$$

$$\text{حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) } اس = اب + ب س, \quad اس = ك + ب س$$

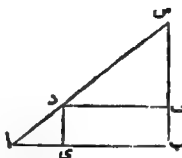
$$\text{وحسب المفروض } ك + (د - ك) = ح = ١٠$$

$$\text{اي } ك = \frac{١}{٢} د + \frac{١}{٢} ح = \frac{١}{٢} (١٤ + ١٠) = ١٢$$

$$\text{وب } ب س = د - ك = ١٤ - ١٢ = ٢$$

(ع ٦) مفروض مساحة مثلث قائم الزاوية  $اب س$

واضلاعه شكل متوازي الاضلاع مرسوم فيه . مطلوب  
الضلع  $ب س$



$$\text{لنفرض المساحة } ع = د ي = ف ب = ب$$

ب = د ف = د ب س = ك اذا س ف = ب س - ب ف = ف - ب

(١) بمشابهة المثلثات س ف : د ف :: ب س : ا ب

(٢) او حسب المفروض ك - ب : د :: ك : الضلع ا ب

(٢) و د ك = (ك - ب) × ا ب

(٤) المساحة ع = ا ب × ١/٢ ب س = ا ب × ١/٢ ك

(٥) بالقسمة على ١/٢ ك = ا ب × ٢

(٦) د ك = (ك - ب) × (٢/ك) = ٢ - ٢ ب/ك

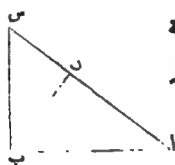
(٧) و ك = د + ٢ ب/ك = ٢ - ٢ ب/ك + ٢ ب/ك = ٢

(٧ ع) مفروض ثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية

ا ب س مطلوب فسي الوتر الحادئين من عمودتي مرسوم

من القائمة على الوتر. حسب اقليدس (ق ٨ ك ٦) ينقسم

المثلث الى اثنين كل واحد منها قائم الزاوية



(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١)  $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٢) بالشكل  $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٣) ربع المجانين  $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٤) بالتعويض في (١)  $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times (\overline{AD} + \overline{DC})$

(٥) بالبعط  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \times \overline{DC}$

(٦) بالمقابلة  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \times \overline{DC}$

(٧) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١)  $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٨) بمساواة (٦) و (٧)  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \times \overline{DC}$

(٩) بالمقابلة  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \times \overline{DC}$

(١٠) بالقسمة ا د =  $\overline{AB}^2 / \overline{AD}$

ا س

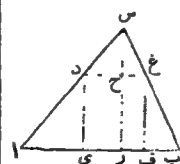
(٨ ع) مفروض مساحة شكل د ي ف غ

متوازي الاضلاع مرسوم في المثلث ا ب س مطلوب

اضلاعه

ارسم س ر عموديا على ا ب وحسب المفروض

د غ يوازي ا ب فانذا



المثلث س غ ح يشبه المثلث س ر ب

والمثلث س د غ يشبه المثلث س ا ب

فلنفرض س ر = د و ا ب = ب و د غ = ك والمساحة = ع

(١) بمشابهة المثلثات س ب س غ :: ا ب د غ

(٢) و س ب س غ :: س ر س ح

(٣) وبماواة النسب ا ب د غ :: س ر س ح

(٤) اي  $\frac{دغ \times س ر}{ا ب} = س ح$

(٥) بالشكل س ر - س ح = ح ر = د ي

(٦) بالتعويض س ر -  $\frac{دغ \times س ر}{ا ب} = د ي$

(٧) وبالمفروض د -  $\frac{د ك}{ب} = د ي$

(٨) ع = د غ  $\times$  د ي = د ك  $\times$  (د -  $\frac{د ك}{ب}$ )

(٩) اي ع = د ك -  $\frac{د ك^2}{ب}$

(١٠) بالتحويل ك =  $\frac{ب}{٤} + \frac{ب}{٤} - \frac{ع ب}{د} = د غ$

ثم نعرف د ي بقسمة المساحة على د غ

(١١) لنا ان نرمس من نقطة مفروضة في دائرة مفروضة خطأ مستقيماً حتى يكون

بين جزئيه الواقعين بين النقطة والمحيط فضلة مفروضة

في الدائرة ا ب ر لتكن ف نقطة مفروضة في



القطر ا ب ثم لنفرض ا ب ر لتكن ف نقطة مفروضة في

و ف ر = ك والفضلة المفروضة = د اذا ف ق =

ك + د

(١) حسب اقليدس (ق ٢٥ ك ٢) ف ر  $\times$  ف ق = ا ب  $\times$  ب ف

(٢) وبالمفروض ك  $\times$  (ك + د) = ب  $\times$  ف

(٣) اي ك + د ك = ب ف

(٤) باتمام الترميع ك + د ك +  $\frac{د}{٢} = \frac{د}{٢} + ب ف$

(٥) بالتجذير والمقابلة ك =  $\frac{١}{٢} د + \frac{١}{٢} د + ب ف = ف ر$

(ع ١٠) مفروض مجتمع ضلعي مثلث ١١٥٥ وطول العمود من الزاوية الواقعة

بينها على الضلع الثالث ٣٠٠ وفضلة قسي الضلع الثالث الحادئين من وقوع العمود

طوي ٤٩٥ فا هو طول الاضلاع الثلاثة الجواب ٩٤٥ و ٣٢٥ و ٢٨٠

(ع ١١) مفروض محيط مثلث قائم الزاوية ٧٢٠ وطول العمود الواقع من القائمة على الوتر ١٤٤ فما هو طول الاضلاع الجواب ٢٠٠ و ٢٤٠ و ١٨٠

(ع ١٢) مفروض فضلة قطر مربع واحد اضلاعه مطلوب الاضلاع ليكن ك = الضلع المطلوب وف = الفضلة بينه وبين القطر اذا ك = ف + ف ٢٦

(ع ١٣) مفروض قاعدة مثلث مستوي وعلوه مطلوب ضلع مربع مرسوم في المثلث قائم على القاعدة مثل دى ف غ في (ع ٨) لنفرض ك = ضلع المربع وق = قاعدة المثلث وع = علوه ك = ق + ع

(ع ١٤) مفروض ضلعاً مثلث وطول خط ينصف الزاوية الواقعة بينهما . مطلوب طول القاعدة اي الضلع الثالث الذي يقع عليه الخط المنصف للزاوية

لنفرض ك = القاعدة ت = احد الضلعين المفروضين وس = الآخر وب الخط المنصف ك = (ت + س)  $\times \frac{1}{2}$   $\frac{ت \times س}{ت + س}$

(ع ١٥) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٥ وضلع مربع مرسوم فيه (مثل شكل دى ف ب في (١٦) = ١٢ مطلوب الضلعان الآخران من المثلث

الجواب ٢٨ و ٢١

(ع ١٦) في مثلث قائم الزاوية كانت الاذرع في محيطه مساوية للاذرع المربعة في مساحته ونسبة القاعدة الى العمود :: ٤ : ٣ مطلوب طول كل ضلع من اضلاعه

الجواب ٦ و ٨ و ١٠

(ع ١٧) دار طولها ١٨ ذراعاً وعرضها ١٢ ذراعاً يحيط بها مشى متمازي العرض ومساحة تساوي مساحة الدار . فما هو عرض المشى

(ع ١٨) حذلة زواياها قائمة نسبة ضلع منها الى آخر :: ٦ : ٥ وسُدس مساحتها ١٢٥ قصبه مربعة فما هو طول الاضلاع

(ع ١٩) في مثلث قائم الزاوية نسبة مساحته الى مساحة مستطيل مفروض :: ٨ : ٥ والضلع الاقصر من كل واحد منها ٦٠ قصبه . والضلع الآخر من المثلث

المترالي للقائمة مساوي لقطر المستطيل فما هي مساحة المثلث والمستطيل الجواب ٤٨٠٠ و ٣٠٠٠ قصبه مربعة

(ع ٢٠) صندوقان زواياها قائمة اعطيهما يسع ٢٠ قدماً مكعباً اكثر من اصغرها ومساحة الاصغر الى مساحة الاكبر :: ٤ : ٥ وقاعدتهما مربعتان وضلع الواحد

مساوي لعنى الصندوق الآخر فما هو عمق الصندوق الجواب ٤ و ٥ اقلد

(ع ٢١) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية مرسومة من نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع الى الاضلاع الثلاثة فما طول الاضلاع  
 لنفرض ت وب وس = المخطوط العمودية وك = نصف احد الاضلاع  
 اذاً ك =  $\frac{ت + ب + س}{٣}$

(ع ٢٢) ساحة مربعة احاط بها سوق متساوي العرض وطول ضلع الساحة ثلاث قصبات اقل من تسعة اضعاف عرض السوق والنصبات المربعة في السوق أكثر من النصبات في محيط الساحة بتتبن وثمانية وعشرين فما في مساحة الساحة  
 الجواب ٥٧٦ قصبة مربعة

(ع ٢٣) مفروض طول خطين مرسومين من الزاويتين المحاذيتين من مثلث قائم الزاوية الى نقطة اتصاف الضلعين المتقابلين . مطلوب طول الاضلاع لنفرض ك = نصف القاعدة وي = نصف العمود وت وب = الخطين المفروضين  
 ك =  $\frac{٤ ب - ٢ ت}{٥}$  وي =  $\frac{٤ ت - ٢ ب}{٥}$

(ع ٢٤) مفروض قاعدة مثلث ب وطوله العمودي ح مطلوب ضلع مربع مرسوم فيه ك  
 برهن صحة هذا الجواب هندسياً

(ع ٢٥) مفروض قاعدة مثلث ب وطوله ح مطلوب ان يرسم فيه مستطيل بين ضلعيه نسبة مفروضة اي نسبة ك : ي افرض علو الشكل ك وطوله او قاعدته ي وافرض ك : ي :: ا : ن اي ي = ن ك  
 الجواب ك =  $\frac{ب + ح}{٢}$   
 (ع ٢٦) مفروض قطر دائرة ق مطلوب ك ضلع مثلث متساوي الاضلاع مرسوماً في الدائرة  
 الجواب ك =  $\frac{٢٦}{٢}$

برهن صحة هذا الجواب هندسياً

(ع ٢٧) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية ب وفضله الوتر والساق ف  
 الجواب  $\frac{٢ ب - ٢ ف}{٢}$  مطلوب الساق

(ع ٢٨) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ح ونسبة القاعدة الى الساق :: م : ن  
 الجواب  $\frac{٢ م + ٢ ن}{٢}$  مطلوب الساق

(ع ٢٩) مفروض قطري زاوية قائمة ق والمحيط ط مطلوب الاضلاع  
 الجواب ط =  $\frac{٢ ق - ٢ ط}{٢}$

(ع ٢٠) مفروض قطر ذي زوايا قائمة ١٠ ومحيطه ٢٨ فما هو طول الاضلاع  
(ع ٢١) مفروض قطر دائرة ق مطلوب ضلع مثلث متساوي الاضلاع  
محيطاً بها الجواب ف ٢٦

(ع ٢٢) من اية نقطة كانت داخل مثلث متساوي الاضلاع رُسِمَت خطوط  
عمودية على الاضلاع مطلوب م مجتمع طول تلك الخطوط م = طو المثلث  
(ع ٢٣) مفروض فضلة قطر مربع وضلعة = ف مطلوب الضلع  
الجواب ف + ٢٦

(ع ٢٤) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية اب س من نقطة مفروضة  
داخل مثلث متساوي الاضلاع على الاضلاع الثلاثة مطلوب طول الاضلاع  
الجواب  $\frac{(٢ + ب + س)}{٢}$

## الفصل السابع والعشرون

في تعديل المنحنيات

٢٦٥ قد نظرنا في ما تقدم الى استعمال الجبر في معرفة اشكال هندسية محاطة  
بخطوط مستقيمة . فلننظر الآن الى مناسبة الجبر لمعرفة الخطوط المنحنية وكيفية الدلالة  
على خصائصها ونسبة بعضها الى بعض بواسطة معادلة

ان اوضاع نقط خطي بمنحن مرسوم على سطح مستوي تُعَيَّن من بُعد كل واحدة عن  
خطين مستقيمين احدهما عمودي على الآخر  
ليكن اغ اف عمودين احدهما على الآخر  
ودب ودب' ود" ب' اعمدة على اف  
وسد وسد' وسد" د' اعمدة على اغ  
فيُعرف وضع دب من طول خطي



ب دب وسد ووضع د بطول خطي ب دب وسد ووضع د من خطي ب دب  
وسد وقد سمي الخطان المرسومان كما ذكر من نقطة في خطي بمنحن معيَّن تلك  
النقطة ولجل التمييز بين الخطين قد سمي ب دب مثلاً معيَّن نقطة د وسد فصلهما

فستعمل غالباً المعينة على المخط  $\overline{اف}$  وهي مساوية للنصلة على  $\overline{اغ}$  اي  $اب = اس$   
وب  $ب = س$   $س = الح$  (اقليدس ك ١ ق ٢٢) وسي  $\overline{اف}$  و  $\overline{اغ}$  محورَي المعين

٢٦٦ ان رُسِمَت خطوط معينة من كل نقطة في خطٍ مُعَيَّن ودُلَّ على نسبة كل المعينة الى فصلتها بواسطة معادلة فيعين بذلك كل نقطة من المنحني لا محالة . ويُعَلَّم شكله وكثير من خصائصه بواسطة تحويل المعادلة بالمقابلة والقسمة والترقية والتخدير وهلمَّ جراً . ونقط المنحني غير معدودة فلا يمكن رسم معين لكل واحدة منها ولكن لنا طريقة لتخصيل معادلة دالة على جميع اجزاء المنحني وهي ببناء المعادلة على خاصية مشتركة بين كل زوج مركب من معين وفصلته وفي ايضاح ذلك لننظر اولاً الى خطٍ مستقيم

فليكن  $\overline{اح}$  خطاً وليرسم منه معينات وفصلات على المحورين  $\overline{اف}$  و  $\overline{اغ}$  العمودين احدهما على الآخر وتُجْعَل زاوية  $\overline{فاح}$  حتى تكون النصلة  $\overline{سد}$  او  $\overline{اب}$  مضاعف المعين  $\overline{ب د}$  فتكون المثلثات  $\overline{اب د}$   $\overline{اب د}$  و  $\overline{اب د}$  متشابهة اقليدس (ق ٢٩ ك ١) ونسبة

$اب : ب د :: اب : ب د :: اب : ب د$  وان فُرض  $اب = ٢ ب د$  فحينئذٍ  $اب = ٢ ب د$  و  $اب = ٢ ب د$   $\overline{د}$  الخ اي كل فصلة = مضاعف معينها . ولكن لا نحتاج الى معادلة لكل زوج من معين مع فصلته بل تكفي واحدة للجميع . فلنفرض  $ك =$  احلى النصلات و  $ي =$  معينها اذا  $ك = ٢ ي$  او  $ي = \frac{1}{2} ك$  وهذه معادلة دالة على نسبة المعينات والنصلات بعضها لبعض . ولا فرق بينها وبين ما سواما من المعادلات غير انه ليس لحرثي  $ك$  و  $ي$  قيمة معلومة الا انها دالتان على معين نقطة وفصلتها . ثم ان فُرض  $ك = اب$  اذا  $ي = ب د$   
وان فُرض  $ك = اب$  "  $ي = ب د$   
" "  $ك = اب$  "  $ي = ب د$  الخ

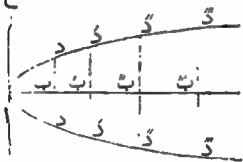
فان عُيِّن طول احد الزوجين تُعرَف الآخر من المعادلة فان فُرض  $ك = ٢$  اذا  $ي = ١$  وان فُرض  $ك = ٨$  فاذا  $ي = ٤$  وان فُرض  $ك = ١٠٠$  فاذا  $ي = ٥٠$  الخ





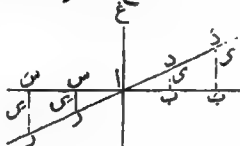
٢٦٧ اذا اخلفت زاوية  $\angle \Gamma$  عما سبق في الرسم السابق كما يرى في هذا الرسم نبين المعادلة على حالها الآتي  
 مسي ك فلفرضت دالة على نسبة  $\Gamma$  الى  $\Gamma$  اي  $\Gamma$  : ك  
 :: ت : ا فتصير المعادلة . ت ك =  $\Gamma$  فيكون المسمى ت  
 صحيحا وكسرا حسبا كانت  $\Gamma$  اكبر من ك او اصغر منها

ثم نستعمل ما قد أوضح في فصول معادلة دالة على خط معين. ولنفرض انه يراد معادلة دالة على شكل شلجي. فنحن خصائص هذا الشكل كما يتضح في حساب قطع المخروطات ان الفصالات متناسبة الى مربعات المعينات. فلو كانت نسبة مربع احدى المعينات الى فصلها. ولما كانت هذه النسبة هي في بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل ككل يحدث من ذلك هذه المعادلة  $ي:ك::ت:ا$  وت  $ك-ي$  وفي معادلة المنحني ونصح في كل نقطة منه ومما تغيرت  $ك$  وي تبقى  $ت$  على حالها ثم ان كانت  $ك-ي$  فبالخذير  $ي=م$  وان كان  $ت=ا$  اذا  $ي=ا$   $ك=م$   $غ$



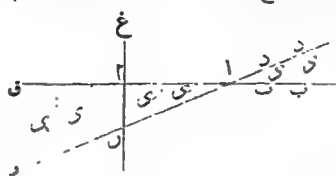
وان فريض ك = ٤٥ = ٤٥ × ٢ = ٩٠  
 فاذا ي = ٢ = ٢ × ٢ = ٤  
 وان فريض ك = ٨ = ٨ × ٢ = ١٦  
 فاذا ي = ٤ = ٤ × ٢ = ٨  
 فريض ك = ١٢ = ١٢ × ٢ = ٢٤  
 وان فريض ك = ١٨ = ١٨ × ٢ = ٣٦  
 فريض ك = ٢٤ = ٢٤ × ٢ = ٤٨

٢٦٨ متى رُسِّمَت المَعْبُتَاتُ عَلَى جَانِبِي الْفُطْر تَكُونُ الْوَاقِعَةُ فَوْقَ اِجْبَاطِيَّةٍ وَالْوَاقِعَةُ تَحْتَ سَلْبِيَّةٍ. مِثَالُهُ فِي الرَّسْمِ السَّابِقِ اِنْ حُبِّبَتِ الْمَعْبُتَاتُ فَوْقَ اَفْ اِجْبَاطِيَّةٍ تَكُونُ الَّتِي تَحْتَ سَلْبِيَّةٍ وَالْفَصَلَاتُ الْوَاقِعَةُ عَنِ الْيَمِينِ مِثْلُ اَب اَبْ اَلْح اِنْ حُبِّبَتِ اِجْبَاطِيَّةٍ فَتَكُونُ الْوَاقِعَةُ عَنِ الْبَاسِرِ مِثْلُ اَس اَسْ سَلْبِيَّةٍ. وَفِي حُلِّ مِثْلَةِ اِنْ خَرَجَ مَعْرُوفٌ اَوْ فَصْلَةٌ سَلْبِيًّا يُوْخَذُ عَلَى جَانِبِ الْمُحَوَّرِ الْمُتَقَابِلِ لِلْجَانِبِ الْمَحْصُوبِ اِجْبَاطِيًّا



٢٦١ اننا في ما تقدم نرى الخط المستقيم او المحني يقطع المحور في نقطة تقاطع

المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين . فيمكن ان تحذف  
النصلات على المحور  $\overline{ق}$  مبتدئاً من المخطط  $\overline{ع}$  فلنفرض  $ك = احدى النصلات م$



او  $م ب$  الح  $و ي = معيها$

ولنفرض  $ل = ا ب$  و  $د =$

$ا ب$  و  $ت = نسبة د : ا ب$

اذ  $ا ت ل = ي و ل = ت$

وبالشكل  $ا ب = م ب - ا م$

اي  $ل = ك - ب$  وبماواة المعادلتين  $ك - ب = ت$  و  $ك = ت + ب$

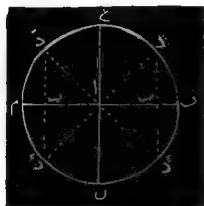
٢٧٠ يجب ان يتحقق كون المعينات والنصلات ايجابية او سلبية والى اين تنتهي  
احدهما . فنرى ان النصلة تنتهي وتلاشى في نقطة التقاء المخطط المنحني بالمحور الذي تقاس  
النصلات عليه . والمعينة تلاشى عند نقطة التقاء المنحني بالمحور الذي تقاس المعينات  
عليه . مثالة في رسم التلجي السابق نرى المعينات تقاس على المخطط  $\overline{ا ف}$  فيقل طولها  
شيئاً فشيئاً بتقريب المنحني الى المحور الى ان تزول بالكلية في نقطة التقاءها . والنصلات  
تقاس على المخطط  $\overline{ا ع}$  وتقل ايضاً كما سبق الى ان تلاشى عند  $\overline{ا}$

٢٧١- الامر واضح انه اذا التقي المحوران بالمنحني في نقطة واحدة تلاشى المعينات  
والنصلات معاً كما في الرسم المشار اليه . ولكن (في رسم رقم ٢٦٩) نرى المحور  $\overline{م ق}$  يقطع  
المخطط  $\overline{د ف}$  في  $\overline{ا و ع}$  يقطع في  $\overline{ن}$  فالمعينات اي  $\overline{م ق}$  تلاشى عند  $\overline{ا}$  والنصلات  
اي  $\overline{ع ن}$  تلاشى عند  $\overline{م ا و ن}$

٢٧٢ كل معين او فصله يتغير من ايجاب الى سلب عند مروره في نقطة التلاشي  
اي النقطة التي فيها تكون قيمته صفراً . مثالة في رسم رقم ٢٦٨ نرى المعين  $\overline{ق ي}$  يقل شيئاً  
فشيئاً الى ان يتلاشى في  $\overline{ا}$  ثم يصير سلباً لانه يقع تحت المحور  $\overline{س ق}$  وكذلك النصلات  
عن  $\overline{ا ع}$  تقل شيئاً فشيئاً الى ان تلاشى عند  $\overline{ا}$  ثم يصير سلبية عن يسار  $\overline{ا ع}$  ونرى  
هنا ان الاثنين تغيرتا معاً في نقطة واحدة ولكن في رسم رقم ٢٦٩ نرى المعينات تتغير  
عند  $\overline{ا}$  والنصلات تبقى ايجابية الى  $\overline{ع ن}$  وبين  $\overline{ا و ع}$  تكون المعينات سلبية  
والنصلات ايجابية

٢٧٣ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط ومنصودنا الآن انما هو ذكر بعض امثلة لايضاج ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من العلوم التعليمية

(١٤) مطلوب معادلة الدائرة فلنفرض دائرة  $\overline{ف غ م}$  ولنرسم القطرين  $\overline{غ ن}$   $\overline{ف م}$  احدهما عمودي على الآخر ارم من اية نقطة شئت في النقطي اي محيط الدائرة المعين  $\overline{د ب}$  عموديا على  $\overline{ا ف}$  فيكون  $\overline{ا ب}$  النصلة المناظرة للمعين  $\overline{د ب}$



ثم لنفرض نصف القطر  $\overline{ا د} = \overline{ر}$  و  $\overline{ا ب} = \overline{ك}$   
و  $\overline{ب د} = \overline{ي}$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١)  $\overline{ب د} = \overline{ا د} - \overline{ا ب}$

وبالمفروض  $\overline{ي} = \overline{ر} - \overline{ك}$   
بالتجذير  $\overline{ي}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ك}^2$

وعلى هذا السبيل  $\overline{ك}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ي}^2$  اي ان النصلة تساوي الجذر المائي من فصلة مربع نصف القطر ومربع المعين. فان حسب نصف قطر الدائرة واحدا نصير المعادلتان  $\overline{ي}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ك}^2$  و  $\overline{ك}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ي}^2$  وتحصل هذه المعادلة مها كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والنصلة يكونان ضلعي مثلث ذي قائمة و  $\overline{ا د}$  الوتر لانه نصف قطر الدائرة ونرى للمعادلتين قيمة ملتبسة اي تكون ايجابية ان سلبية فنحسب المعينات والنصلات في الربع الاول  $\overline{غ ف}$  ايجابية وفي الربع الثاني  $\overline{غ م}$  تبقى المعينات ايجابية ونصير النصلات سلبية وفي الربع الثالث  $\overline{م ن}$  نصيران سلبيتين وفي الربع الرابع  $\overline{ن ف}$  تبقى المعينات سلبية ونعود النصلات ايجابية اي

ف غ	تكون ك + و ي +	في الربع
غ م	" ك - و ي +	
م ن	" ك - و ي -	
ن ف	" ك + و ي -	

٢٧٤ قد نجسب في الهندسة ان المخطوط حاصلة من حركة نقطة. فان تحركت الى جهة واحدة حصل خط مستقيم. وان تغيرت الجهة في كل وقت حصل خط\*

تنبيه . في هذا الشكل يجب ان يوصل بين م وف بخط عمودي على ا ب

ان يوصل بينم وف بخط عمودي على اب

والنظر اب = ب

ولان  $\overline{FM}$   $\overline{RN}$  عمودان على  $AB$  فالثلث  $AFM$  شبه المثلث  $ARN$  (اقلیدس

(١) بالمثلثات المشابهة اف:فم::ار:رن

(۲) ای  $\frac{f \times f_b}{f_a} = r_n$

$$(٤) \quad \overline{\text{رن}} = \frac{\overline{\text{فم}} \times \overline{\text{فب}}}{\overline{\text{اف}}}$$

$$(٥) \quad \text{حسب اقليدس (ق ٢٥ ك ٢ وق ٢ ك ٢) } \overline{\text{رن}} = \overline{\text{ار}} \times \overline{\text{رب}} = \overline{\text{رن}}$$

$$(٦) \quad \text{بوضع فب عوضاً عن ار واف عوضاً عن رب تصير فب} \times \overline{\text{اف}} = \overline{\text{رن}}$$

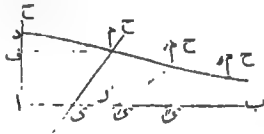
$$(٧) \quad \text{بساواة (٤) و (٦) فب} \times \overline{\text{اف}} = \frac{\overline{\text{فم}} \times \overline{\text{فب}}}{\overline{\text{اف}}}$$

$$(٨) \quad \text{اي اف} = \overline{\text{فم}} \times \overline{\text{فب}}$$

$$(٩) \quad \text{او حسباً فريض ك} = \overline{\text{فم}} \times (\text{ب} - \text{ك})$$

اي كعب النصلة يعدل مربع المعين في فصلة قطر الدائرة والنصلة . وهكذا في كل زوج من معين وفصلة

(٢٤) مطلوب معادلة المخفي المسمى بوق نكوميديس . وكيفية رسمه وان تأخذ



خطاً مفروضاً وضعاً مثل اب ولتكن س

نقطة خارجة عنه ويدور خط س ح حول

هذه النقطة وفي كل نقطة من مروره بخط

اب اجعل م وي م وي م مساوياً

لخط اد فيمر المخفي بنقط د وم وم وم

الح . ثم لكي نستعلم معادلة ليكن سد واب المحورين ارم فم يوازي ار ورم

يوازي سف وقد رُسم م = ا د

فلنفرض النصلة اف = فم = ك

ولنفرض المعينة رم = اف = م

ولنفرض الخط المفروض س ا = ت

و ا د = م = ب

فاذا س ف = س ا + ا ف = ت + م

لان س م ينقطع المتوازيين س د ورم وايضاً ينقطع ار وفم فنبتلنا

س م ورم متشابهان

(١) بالمثلثات المتشابهة س م : ف م :: م : رم :: رم : رم

$$\frac{\overline{٢م} \times \overline{٢ف}}{\overline{٢س}} = \overline{رى}$$

(٢) و

$$\frac{\overline{٢م} \times \overline{٢ف}}{\overline{٢س}} = \overline{رى}$$

(٢) بترييع الجانين

$$\overline{٢م} - \overline{٢ى} = \overline{رى} \quad (٤٧ ك ١)$$

$$\frac{\overline{٢م} \times \overline{٢ف}}{\overline{٢س}} = \overline{رى} - \overline{٢م} \quad (٤) \text{ و } (٢)$$

$$(٦) \text{ اي بالمفروض } \overline{ب} - \overline{ى} = \overline{ك} \quad (٢٢ + \overline{ى})$$

$$(٧) \text{ او } (\overline{ت} + \overline{ى}) \times (\overline{ب} - \overline{ى}) = \overline{ك} \quad (٢)$$

٢٧٥ يرى في الامثلة المتقدمة ان المعادلة اخذت من وصف كيفية المنحني . وقد يعكس العمل اي تُفرض المعادلة ومنها يرسم المنحني بأخذ فصولات مختلفة وجعل معينات لما فيبر المنحني باطراف هذه المعينات

(٤ع) لنا ان نرمس معينا معادلة  $\overline{ك} = \overline{ى}$  او  $\overline{ى} = \overline{ك}$  (انظر رسم الشلجي) خذ على خط اف فصولات مختلفة طولاً اي

$$\overline{اب} = ٤ \quad \text{فيكون المعين } \overline{ب} - \overline{د} = ٢$$

$$\overline{اب} = ٨ \quad \text{فيكون المعين } \overline{ب} - \overline{د} = ٤$$

$$\overline{اب} = ١٢ \quad \text{فيكون المعين } \overline{ب} - \overline{د} = ٥$$

$$\overline{اب} = ١٨ \quad \text{فيكون المعين } \overline{ب} - \overline{د} = ٦$$

ثم ركب هذه المعينات مع فصلاتها واصل بين اطرافها بنقط  $\overline{اد} \overline{د} \overline{د}$  فيرسم المنحني المطلوب . ولا ريب ان الخط يكون اقرب الى المطلوب كلما زاد عدد المعينات والصلات المأخوذة

٢٧٦ اذا وُهمت حركة نقطة حتى تمر باطراف جميع المعينات المفروضة في معادلة يسمى الخط الحادث طريق النقطة اي الطريق التي تتحرك فيها والتي توجد فيها ابناً . ويسمى ايضاً طريق المعادلة التي منها تؤخذ مواضع النقطة في حركتها . مثالة ان الشلجي يسمى طريق نقط  $\overline{د} \overline{د} \overline{د}$  او طريق المعادلات  $\overline{ك} = \overline{ى}$  وقوس الدائرة هي طريق المعادلة  $\overline{ك} = \overline{ى} + \overline{٢م} - \overline{٢ى}$  فعرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المنحني او المستقيم التي هي له

(٥٤) مطلوب طريق المعادلة ك = ت - اوت ك = ي التي فيها نفرض ك  
وي معينات وفصلات مختلفة وت كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين ك على اطوال  
مختلفة فلا بد للفصل ي ان يتغير بالنسبة الى ك حتى تبقى المعادلات ك = ي او  
يجل المعادلة الى نسبة ي : ك :: ت : ا اي لا تتغير نسبة ي : ك لان ت كمية معينة  
اي تكون نسبة فصله الى معينها كسبة فصله اخرى الى معينها مها كان . فلنفرض  
فصلتين ا ب - ا ب (رسم رقم ٢٦٦) و ب د و ب د معينها اذا ا ب : ب د :: ا ب :  
ب د فيكون خط ا د مستقيماً (اقليدس ق ٢٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة  
ثم ان كانت المعادلة المفروضة ك = ت + ب فزيادة ب لا تسبب تغييراً في  
الطريق . لان ب انا يزيد طول الفاصلات فقط . وعوضاً عن ان تقاس من ا تقاس  
من نقطة اخرى مثل م في رسم رقم ٢٦٦ وتبقى نسبة ا ب : ا ب الى ب د ا و ب د  
كما كانت فيكون الخط مستقيماً

٢٧٧ يبرهن ما سبق ان كل معادلة تكون ك = وي اي الفاصلات والمعينات  
في اجزاء مختلفة منها وليس لما الا القوة الاولى تكون طريقها خطاً مستقيماً لان كل  
معادلة من هذا النوع يمكنها ان نحول الى ك = ت + كما يتضح من هذه العملية  
(٦٤) مطلوب طريقة المعادلة

س ك - د + ح ك - ي + م = ن  
بالمقابلة س ك + ح ك = ي + ن - م + د  
وبالقسمة على س + ح نصبر ك =  $\frac{ن - م + د}{س + ح} + \frac{ن}{س + ح}$   
فيمكن هنا ان يدل على الكميات الثابتة بالتعويض عنها بحرف واحد . فلنفرض  
س + ح = ت و  $\frac{ن - م + د}{س + ح} = ب$  فنصبر المعادلة ك = ت + ب التي طريقها  
خط مستقيم كما تقدم

٢٧٨ ثم انه متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفاصلات او لكموتها او للقوة  
الرابعة منها ولم جراً يكون طريق المعادلة خطاً مستقيماً لان المعينات الموضوعة  
على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فاصلاتها . ولكن  
لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او كموتها او قواعها الرابعة  
والخامسة ولم جراً كما علم من باب النعمة . مثلاً ان فُرض ك = ي فتزيد المعينات

أكثر من الفصلات فان اخذت الفصلات ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ تكون المعينات مساوية لمربعاتها اي ١ و ٤ و ٩ و ١٦ الخ

٢٧٩ ان عدة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصلات المختلفة في غير متناهية . وكل معادلة لما طريق مختصة بها . اذا تكون اشكال المنحنيات غير متناهية ولكنها تنحصر في انواع . وقد جرت العادة عند المولدين ان يربطوها في انواع حسب درجات معادلاتها فيدل على انواع المخطوط بالدليل الاعظم ان بجميع دلائل المعينات والفصلات في جزء من المعادلة . مثالة  $ك = ي$  تختص بخط من النوع الاول لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحد وليس في هذا النوع ممن كما رأينا سابقا

والمعادلة  $س ك - ت ك ي = ي$  مختصة بالنوع الثاني من المخطوط والنوع الاول من المنحنيات لان الدليل الاعظم هو ٢ و  $ت ي + ك ي = ب ك$  تختص بالنوع الثاني ايضا . لانه وان لم يكن فيها دليل أكبر من واحد لكن بجميع دلائل  $ك ي$  في الجزء الثاني اي  $١ + ١ = ٢$  و  $ي - ت ك ي = ب ك$  مختصة بالنوع الثالث من المخطوط والثاني من المنحنيات لان دليل  $ي$  الاعظم هو ٢

٢٨٠ في المنحنيات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصلة قيمات مختلفة فيلتي المعين بالمنحني في نقط متعددة لان طول المعين متوقف على معادلة المنحني . وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى يكون لها قيمتان فأكثر كما رأينا سابقا فتكون للمعين قيمات مختلفة

ان المعادلة من الدرجة الاولى لها قيمة واحدة فقط وخطها ينقطع المعين في نقطة واحدة فقط . مثالة معادلة خط  $أ ح$  ( رسم رقم ٢٦٦ ) في  $ا ك = ي$  فنرى ان  $ي$  لها قيمة واحدة فقط و  $ك$  لا تتغير . فان اخذ الفصلة  $ك = ا ب$  يكون المعين  $ي = ب د$  الذي يمكنه ان يلاقي  $أ ح$  في  $د$  فقط

ولكن معادلة التلجي  $ي = ت ك$  لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبيين اي  $ي = ت ك$  احدها ايجابية والاخرى سلبية وذلك دليل على امكان اخراج المعين الى جهتيه من طرف الفصلة فيمكنه ان يلاقي جزءا آخر من المنحني . مثالة معين الفصلة















